Scholieren in Boston vieren Pi-dag op 14 maart, twaalf jaar geleden.

FOTO CHITOSE SUZUKI/AP

WISKUNDE

Benaderingen op het scherp van de snede

Wanneer kunnen getallen met oneindig veel cijfers achter de komma benaderd worden door breuken? Twee wiskundigen hebben een antwoord gevonden, met een bewijs van een bijna tachtig jaar oud vermoeden uit de getaltheorie.

Door onze medewerker **Alex van den Brandhof**

Op 14 maart van dit jaar kondigde Emma Haruka Iwao, een medewerkster van Google, aan dat zij 31.415.926.535.897 decimalen van het getal π (pi) had berekend. De berekening duurde 121 dagen en gebruikte 170 terabyte aan data. Het leverde Iwao een plaats op in de *Guinness World Records*. Leuk, zo'n vermelding, maar met een dergelijke monsterberekening kom je niet in de wiskundige annalen.

Daarvoor moet je je zinnen zetten op een diep vraagstuk, het liefst een dat al jarenlang op een bevrijdend antwoord zit te wachten. Twee wiskundigen, de Griek Dimitris Koukoulopoulos (universiteit van Montreal, Canada) en de Brit James Maynard (universiteit van Oxford, Verenigd Koninkrijk), hebben de laatste jaren gewerkt aan een vermoeden uit 1941 en presenteerden op 10 juli een bewijs, tijdens een congres in Cetraro, een plaats aan de Italiaanse zuidwestkust. „Een groot resultaat", twitterde Fieldsmedaille-laureaat Timothy Gowers. Voor Maynard, die pas 32 jaar oud is, is het niet zijn eerste opzienbarende resultaat. Eerder al verblufte hij de hele wiskundige gemeenschap met werk over de verdeling van priemgetallen.

Speldenprikjes

De gehele getallen (zoals 1, 24 en 481) en de breuken (zoals 3/7) zijn slechts speldenprikjes op de getallenlijn. De meeste getallen hebben oneindig veel cijfers achter de komma, zonder enig repeterend patroon. Dit soort getallen heten 'irrationaal'. Op lijstjes van 'beroemde constanten' bezet het getal π - per definitie de omtrek van een cirkel gedeeld door zijn diameter - steevast de eerste plaats. In 1761 bewees de Zwitser Johann Heinrich Lambert dat π irrationaal is.

Bij praktische toepassingen is het onmogelijk om met een oneindige cijferreeks achter de komma te rekenen. Irrationale getallen worden dan benaderd met eenvoudigere getallen. Gebruik je van π alleen de eerste zoveel decimalen (bijvoorbeeld vijf: 3,14159), dan noemen wiskundigen dit een 'rationale benadering'. Rationale getallen zijn breuken: 3,14159 is niets anders dan 314.159/100.000.

Reusachtige noemers

Vroeger, in tijden waarin scholieren wel een telraam hadden maar geen rekenmachine, werd voor het gemak vaak gerekend met 22/7 als benadering van π. Deze breuk is erg compact: de teller heeft twee cijfers en de noemer maar één, en de benadering is tot op twee cijfers achter de komma nauwkeurig. Een betere benadering is 355/113, waarvan de decimale schrijfwijze begint met 3,14159292. Niet slecht: teller en noemer hebben maar drie cijfers, en het aantal correcte π-decimalen is zes. Of neem 104.348/33.215: niet minder dan negen correcte decimalen. Daar is 314.159/100.000, met getallen die ruim drie keer zo groot zijn, niet tegen opgewassen.

Met het in *Guinness World Records* vermelde getal vond Iwao een rationale benadering van π met een reusachtige noemer. Een fraaie prestatie, maar als je maar over voldoende computerkracht beschikt, gaat het vinden van heel veel decimalen van π moeiteloos. Je krijgt dan een breuk die π benadert met een nauwkeurigheid die ongeveer zo groot is als het aantal cijfers in de noemer. De kunst is juist om π goed te benaderen met een breuk waarvan het aantal cijfers van de noemer flink kleiner is dan het aantal correcte decimalen, en dat is veel moeilijker.

Strenge en milde wiskundigen

Het onderzoek van Koukoulopoulos en Maynard gaat over het vinden van eenvoudige breuken die irrationale getallen goed benaderen. Bij de beoordeling of een benadering goed is, speelt de grootte van de noemer een essentiële rol. Hoewel allebei de breuken 22/7 en 157/50 het getal π tot op twee decimalen nauwkeurig benaderen, zal een wiskundige vanwege de kleinere getallen de eerste benadering prefereren.

Wie wil uitmaken welke rationale benadering door de beugel kan en welke niet, moet eerst definiëren wat hij onder een 'goede benadering' verstaat. Wie in een milde bui is, vindt een benadering al goed als het verschil met de werkelijke waarde van π niet groter is dan, bijvoorbeeld, 1 gedeeld door het kwadraat van de noemer. Een strengere wiskundige kan bijvoorbeeld eisen dat dit verschil kleiner moet zijn dan 1 gedeeld door de vierde macht van de noemer, wil hij de benadering als 'goed' bestempelen.

Voor de milde wiskundige is 22/7 goed, want het verschil met π is ongeveer 0,00126 en dat is kleiner dan 0,02, het kwadraat van 1/7. Maar de strengere denkt daar anders over, want 0,00126 is groter dan 0,0004, de vierde macht van 1/7.

Toen de latere Nobelprijs- en Abelprijswinnaar John Nash jr. in 1948 een aanbeveling nodig had om toegelaten te worden aan de universiteit van Princeton, klopte hij aan bij zijn mentor Richard Duffin. Duffin hield zijn aanbevelingsbrief kort: drie zinnen. De laatste: „He is a mathematical genius." Misschien is dit korte briefje wel waar Duffin de meeste faam mee verwierf.

Waarom deed Duffin geen moeite om wat meer woorden over zijn briljante pupil op te tikken? De boeken zwijgen erover. Was het omdat hij zijn tijd liever besteedde aan een probleem dat hij samen met zijn collega Albert Schaeffer zeven jaar eerder had opgeworpen, maar nog altijd niet had kunnen oplossen? Dat probleem ging over rationale benaderingen van irrationale getallen.

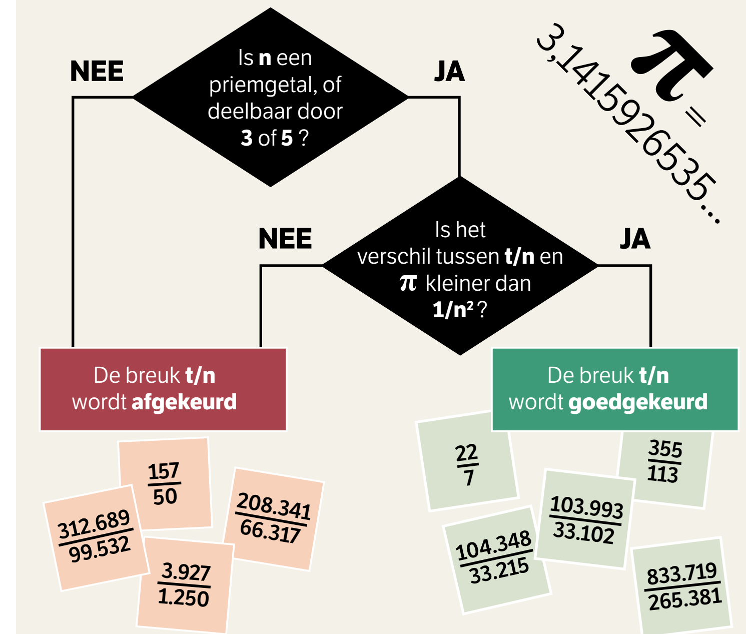
In het onderzoek naar rationale benaderingen leggen wiskundigen beperkingen op aan de noemers: die moeten niet te groot zijn, en om allerlei voor wiskundigen interessante redenen eist men ook nog dat bepaalde getallen verboden zijn. Zo kun je bijvoorbeeld eisen dat de noemer een kwadraat is, zoals 4, 9, 16 en 25.

Alles of niets

Hoe meer beperkingen je oplegt, des te moeilijker wordt het om goede benaderingen te vinden. De vraag die Duffin en Schaeffer zich stelden, was hoeveel beperkingen je kunt opleggen zonder dat dat ten koste gaat van de kwaliteit van de benaderingen. Stel dat voor de noemers alleen kwadraten zijn toegestaan en dat een benadering 'goed' is als het verschil met de exacte waarde niet groter is dan 1 gedeeld door het kwadraat van de noemer. In dit geval kun je het zoeken naar een benadering, van welk irrationaal getal ook, opgeven: goede benaderingen zijn er niet of nauwelijks.

Voorbeeld van beperkingen aan de breuk

Uitgangspunt: een verzameling toegestane noemers en een formule voor de aanvaardbare fout.
Vraag: hoeveel getallen met oneindig veel decimalen zonder repeterend patroon, zoals **π**, kunnen met toegestane breuken op oneindig veel manieren worden benaderd, zodat het verschil met de exacte waarde niet groter is dan de aanvaardbare fout?



Antwoord: ófwel elk getal, ófwel geen enkel getal afhankelijk van het uitgangspunt.

NRC240819 / RvS, Alex van den Brandhof

Hoe zit het als de voorwaarden voor de noemers er anders uitzien, en de definitie van 'goed' wordt gewijzigd? Al in de tijd van Duffin en Schaeffer was het volgende bekend: hoe je die voorwaarden en de aanvaardbare fout ook kiest, ofwel bijna élk getal, ofwel bijna geen énkel getal is op oneindig veel manieren goed benaderbaar (de uitdrukking 'bijna elk getal' mag vaag klinken, maar het verwaarloosbare aantal getallen dat buiten de boot valt, is wiskundig scherp gedefinieerd). Het is alleen heel moeilijk om uit te maken met welk van die twee gevallen je van doen hebt. In 1941 publiceerden Duffin en Schaeffer een artikel waarin ze met behulp van een formule een criterium beschreven dat daarover uitsluitsel geeft.

In de bijna tachtig jaar die volgden, slaagde niemand erin wat Koukoulopoulos en Maynard nu wél is gelukt: aantonen dat Duffin en Schaeffer gelijk hadden. In het deze zomer verschenen boek *Theorems of the 21st Century* schrijft auteur Bogdan Grechuk: „Het Duffin-Schaeffer-vermoeden is een generalisatie van de stelling van Khinchin, maar niemand weet hoe je het moet bewijzen." Grechuk wist kennelijk niet waar Koukoulopoulos en Maynard mee bezig waren. Want die hebben aangetoond dat Duffin en Schaeffer inderdaad gelijk hadden.

Een scherpe kloof

Koukoulopoulos en Maynard, die elkaar kennen uit de tijd dat Maynard postdoc was in Montreal, hebben twee jaar aan het bewijs gewerkt. „Toen Dimitris tijdens een sabbatical naar Oxford kwam, lukte het om ons bewijs te voltooien. Face-to-face-interacties kunnen heel productief zijn", mailt Maynard.

Het opmerkelijke aan de stelling die Koukoulopoulos en Maynard hebben bewezen, is dat er een scherpe kloof is. De aan de breuken opgelegde beperkingen zijn óf zo streng dat geen enkel irrationaal getal fatsoenlijk benaderd kan worden, óf ze zijn voldoende mild zodat er voor álle irrationale getallen goede benaderingen bestaan. Iets ertussenin is er niet.

Rest de onvermijdelijke vraag waar deze theoretische exercitie goed voor is. „Ik heb het gevoel dat ons resultaat wel ergens toegepast kan worden, al kan ik nu nog niks concreets aangeven", zegt Maynard. „Dit is erg gebruikelijk in de wiskunde. Als er nieuwe technieken worden ontwikkeld om een resultaat te bewijzen, begint iedereen daarna na te denken over verdere mogelijkheden van die technieken. Normaal gesproken kunnen ze ook ergens anders worden toegepast. Maar het is nu nog te vroeg om daar iets over te zeggen."