ONEINDIG IN DE WISKUNDE

'ONEINDIG' KOMT OP TWEE MANIEREN VOOR:

ALS AFKORTING

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = L$$

IS KORTER DAN

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\left(n \geq m \rightarrow \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - L\right| < \varepsilon\right)$$

EIGENLIJK BESTAAT ONEINDIG HIER NIET; WE MOGEN NOOIT ZO MAAR "ONEINDIG INVULLEN"

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = I$$

DIT WORDT

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists A \in \mathbb{R})(\exists B \in \mathbb{R})(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R})$$

$$\left(a \leq A \wedge b \geq B \rightarrow \left|\int_a^b e^{-x^2} dx - I\right| < \varepsilon\right)$$

OOK HIER IS ∞ VERDWENEN

TWEEDE MANIER

ALS BIJVOEGLIJK NAAMWOORD // BIJWOORD

OM $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ TE BEPALEN NAMEN WISKUNDIGEN ALS EULER EEN ONEINDIG GROOT NATUURLIJK GETAL EN VULDEN DAT IN

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1+\binom{N}{1}\cdot\frac{1}{N}+\binom{N}{2}\frac{1}{N^2}+\binom{N}{3}\frac{1}{N^3}+\cdots$$

$$= 1+N\cdot\frac{1}{N}+\frac{N(N-1)}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{N^2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{3\cdot 2\cdot 1}\frac{1}{N^3}+\cdots$$

$$\overset{!}{=} 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

! N IS ONEINDIG GROOT DUS

$$\frac{N-1}{N}=1,\quad \frac{N-2}{N}=1,\ \cdots$$

CONCLUSIE

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$$

WAARSCHUWING

ONEINDIG GROTE GETALLEN ZIJN ALLEEN VEILIG IN DE HANDEN VAN EXPERTS

LORD KELVIN:

EEN WISKUNDIGE IS IEMAND VOOR WIE

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

NET ZO VANZELFSPREKEND IS ALS

$2 \times 2 = 4$ VOOR ANDEREN.

HET ECHTE ONDERWERP VAN VANDAAG

ONEINDIGE VERZAMELINGEN

EN DE RARE DINGEN DIE JE

ER MEE KUNT DOEN.

VRAAG 1

WAT IS EEN ONEINDIGE VERZAMELING?

EEN VERZAMELING IS ONEINDIG

ALS ZIJ NIET EINDIG IS ...

VRAAG 2

WAT IS EEN EINDIGE VERZAMELING?

EEN VERZAMELING IS EINDIG

ALS ...

... ZIJ NIET ONEINDIG IS.

KIJK NAAR $\mathbb{N}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	--

ONEINDIG: EEN DEEL IS EVEN GROOT ALS HET GEHEEL

A IS EVEN GROOT ALS B:

ER IS EEN BIJECTIE TUSSEN A EN B

$\mathbb{N}$ IS EVEN GROOT ALS $\mathbb{Z}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	---
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	----

$$n \longleftrightarrow (-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4}\right]$$

$\mathbb{N}$ IS EVEN GROOT ALS $\mathbb{Q}$

ELKE $q \in \mathbb{Q}$ IS EEN BREUK $\frac{t}{n}$

MET $t \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ EN $n > 0$

VERDEEL DE BREUKEN VIA $|t| + n$

0 : GEEN

1 : 0/1

2 : -1/1 0/2 1/1

3 : -2/1 -1/2 0/3 1/2 2/1

4 : -3/1 -2/2 -1/3 0/4 1/3 2/2 3/1

⋮

AFTELBAAR: EVEN GROOT ALS $\mathbb{N}$

CANTOR:

$\mathbb{R}$ IS NIET EVEN GROOT ALS $\mathbb{N}$

DUS ALS $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ INJECTIEF IS

DAN IS ER EEN x MET $x \neq f(n)$

VOOR ALLE n.

KIES (a_0, b_0) WILLEKEURIG

NEEM DE EERSTE m_0 EN n_0 MET

$$f(m_0),\ f(n_0) \in (a_0, b_0) \qquad m_0 < n_0$$

ZET $a_1 = \min\{f(m_0), f(n_0)\}$

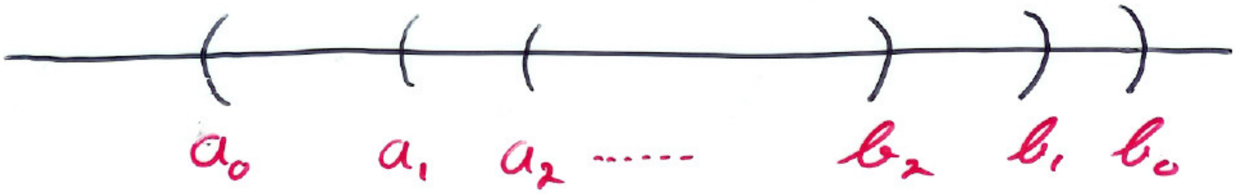
EN $b_1 = \max\{f(m_0), f(n_0)\}$

VERVOLGENS DE EERSTE m_1 EN n_1 MET

$$f(m_1),\ f(n_1) \in (a_1, b_1) \qquad m_1 < n_1$$

ZET $a_2 = \text{MIN}\{f(m_1), f(n_1)\}$ EN $b_2 = \text{MAX}\{f(m_1), f(n_1)\}$

ETC.



ÒF DIT STOPT MET $a_p < b_p$ EN TEN HOOGSTE ÉÉN n MET $f(n) \in (a_p, b_p)$; DAN IS x SNEL GEVONDEN.

ÒF DIT STOPT NOOIT

NEEM $a = \sup\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

$b = \inf\{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$

ELKE $x \in [a, b]$ IS ALS GEWENST.

IMMERS

$$f(p) \notin (a_{p+1}, b_{p+1})$$

DENK HIER OVER NA

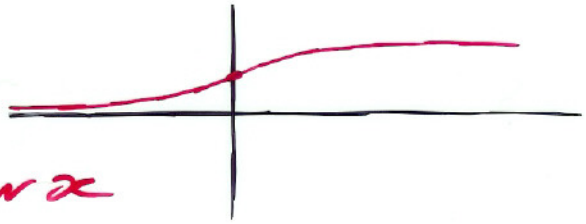
HINT $m_p \geq p$

CANTOR

$\mathbb{R}$ IS EVEN GROOT ALS $\mathbb{R}^2$.

BEWIJS

1. WERK MET $(0,1)$.



$$x \longleftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{ARCTAN} x$$

IS EEN BIJECTIE TUSSEN $\mathbb{R}$ EN $(0,1)$.

2. $(0,1)$ IS EVEN GROOT ALS $P = (0,1) \setminus \mathbb{Q}$.

- AFTELLING VAN $\mathbb{Q} \cap (0,1)$: $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$
- DE RIJ $(\sqrt{2} \cdot 2^{-n} : n \in \mathbb{N})$
- DE BIJECTIE :

$$\sqrt{2} \cdot 2^{-n} \longmapsto \sqrt{2} \cdot 2^{-2n}$$

$$q_n \longmapsto \sqrt{2} \cdot 2^{-(2n+1)}$$

$$x \longmapsto x \qquad \text{(DE REST)}$$

3. P IS EVEN GROOT ALS $P \times P$

$0, d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \ldots\ldots$ WORDT AFGEBEELD

OP $(0, d_1 d_3 d_5 d_7 \ldots , 0, d_2 d_4 d_6 d_8 \ldots)$

CANTOR

X IS NIET EVEN GROOT ALS $\mathcal{P}(X)$.

BEWIJS

ALS $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ GEGEVEN IS

BEKIJK DAN $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.

ER IS GEEN x MET $A = f(x)$.

- $x \in A$ DAN $x \notin f(x)$, DUS $A \neq f(x)$;
- $x \notin A$ DAN $x \in f(x)$, DUS $A \neq f(x)$.

WAT IS $\mathbb{N}$ EIGENLIJK?

DE KLEINSTE VERZAMELING MET

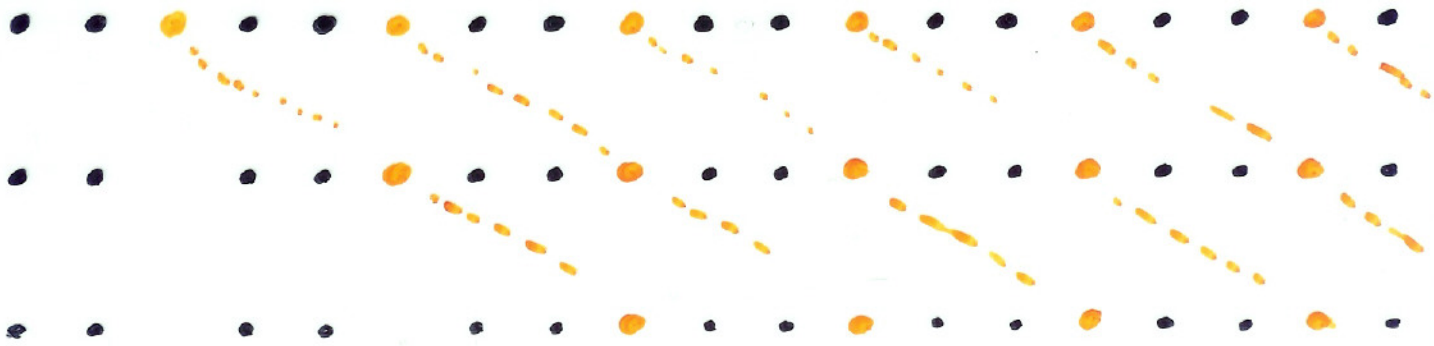
- $\emptyset \in X$
- ALS $x \in X$ DAN $x \cup \{x\} \in X$

DUS

$$\mathbb{N} = \{ \underset{0}{\emptyset}, \underset{1}{\{\emptyset\}}, \underset{2}{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}, \underset{3}{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}}, \ldots \}$$

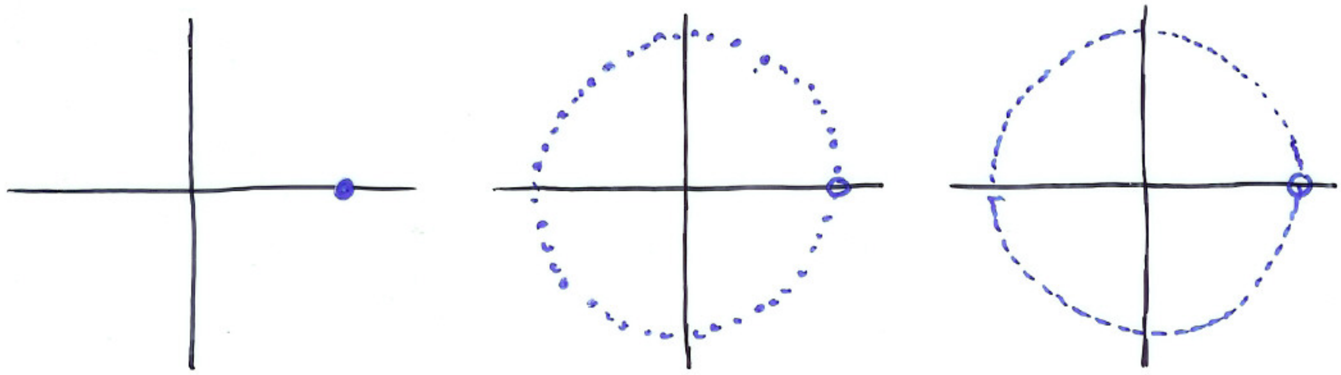
RARITEITEN

1



EEN LEGPUZZEL MET TWEE STUKJES DIE OP VELE (ONEINDIG VEEL) MANIEREN IS UIT TE LEGGEN.

2



$P_1 = \{(1,0)\}$ $\quad P_2 = \{(\cos n, \sin n) : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$

$P_3 = S^1 \setminus (P_1 \cup P_2)$

DRIE STUKJES : SAMEN DE CIRKEL

LAAT P_1 WEG, DRAAI P_2 1 RAD MET DE KLOK MEE : SAMEN DE CIRKEL

3 DE CIRKEL NOGMAALS

$$S^1 = \{ e^{it} : t \in \mathbb{R} \}$$

VOOR $x \in S^1$ ZET $P_x = \{ x e^{in} : n \in \mathbb{Z} \}$

MERK OP: $P_x = P_y$ OF $P_x \cap P_y = \emptyset$

NEEM $H \subseteq S^1$ ZŌ DAT $|H \cap P_x| = 1$

VOOR ELKE x.

NU GELDT DAT

$$\ldots, e^{-i2}H, e^{-i}H, H, e^{i}H, e^{i2}H, \ldots$$

DISJUNCT ZIJN EN S^1 OVERDEKKEN.

JE KUNT AAN H GEEN LENGTE λ

TOEKENNEN:

$\lambda = 0$? DAN ZOU $2\pi = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$

$\lambda > 0$? DAN ZOU $2\pi = \lambda + \lambda + \lambda + \lambda + \lambda + \ldots$

DE SFEER $S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=1\}$

ZIJ ψ DE ROTATIE OVER $2\pi/3$ OM DE z-AS

EN φ DE ROTATIE OVER π

OM $(\sin 1/2, 0, \cos 1/2)$

DAN GELDT $\varphi^2 = \psi^3 = I$ (DUIDELIJK)

GEEN ENKEL ANDER PRODUCT IS I.

DE PRODUCTEN VORMEN EEN GROEP G

EN $G = A \cup B \cup C$

MET
$$\varphi A = B \cup C$$
$$\psi A = B$$
$$\psi B = C$$
$$\psi C = A$$

ALS BIJ DE CIRKEL

$$G_{\underline{x}} = \{ g\underline{x} : g \in G \}$$

DAN $G_{\underline{x}} = G_{\underline{y}}$ OF $G_{\underline{x}} \cap G_{\underline{y}} = \emptyset$.

NEEM EEN H MET $|H \cap G_{\underline{x}}| = 1$

VOOR ALLE $\underline{x}$.

NU IS $\{ gH : g \in G \}$ EEN VERDELING VAN S^2.

GEBRUIK DE VERDELING $G = A \cup B \cup C$

OM BEPAALDE gH BIJ ELKAAR

TE VOEGEN:

$$H_A = \bigcup \{ gH : g \in A \}$$

$$H_B = \bigcup \{ gH : g \in B \}$$

$$H_C = \bigcup \{ gH : g \in C \}$$

DAN: $S^2 = H_A \cup H_B \cup H_C$

$$\varphi H_A = H_B \cup H_C$$

$$\psi H_A = H_B$$

$$\psi H_B = H_C$$

DE DRIE PUZZELSTUKKEN

H_A, H_B EN H_C

ZIJN CONGRUENT, ZE ZIJN OOK CONGRUENT

MET $H_B \cup H_C$.

DEZE PUZZEL PAST OP VELE MANIEREN

IN ELKAAR:

$$S^2 = H_A \cup H_B \cup H_C = H_A \cup \varphi\psi H_C$$

$$= \psi H_C \cup \varphi H_A = \psi H_C \cup \varphi \psi^2 H_B = \cdots$$

CONCLUSIE VAN HAUSDORFF

AAN H_A, H_B EN H_C IS NIET MET GOED FATSOEN EEN 'OPPERVLAKTE' TOE TE KENNEN.

IMMERS

WEGENS $S^2 = H_A \cup H_B \cup H_C$

ZOU $\mathrm{Opp}\, H_A = \frac{4}{3}\pi$ MOETEN GELDEN.

WEGENS $S^2 = H_A \cup \varphi H_A$

ZOU $\mathrm{Opp}\, H_A = 2\pi$ MOETEN GELDEN

NOG MOOIER

MERK OP: $H_A = \varphi(H_B \cup H_C)$

ZET

$$A_1 = \varphi H_B \qquad A_2 = \varphi H_C$$

$$B_1 = \psi A_1 \qquad B_2 = \psi A_2$$

$$C_1 = \psi B_1 \qquad C_2 = \psi B_2$$

DIT ZIJN ZES STUKKEN, ALLEMAAL CONGRUENT MET ELKAAR, ALLEMAAL DISJUNKT EN

$$S^2 = A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup C_2$$

I

$$H_A = \psi^2 \varphi A_1$$

$$H_B = \psi^2 \varphi \psi^2 B_1$$

$$H_C = \psi^2 \varphi \psi C_1$$

II

$$H_A = \psi \varphi A_2$$

$$H_B = \psi \varphi \psi^2 B_2$$

$$H_C = \psi^2 \varphi \psi C_2$$

DUS S^2 IS IN ZES STUKKEN TE VERDELEN DIE WEER IN ELKAAR ZIJN TE ZETTEN TOT TWEE KOPIËN VAN S^2!

HTTP://AW.TWI.TUDELFT.NL/~HART