Hoeveel elementen?

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Utrecht, 16 januari 2010: 10:00–11:00

Delft University of Technology

De vragen van vandaag

- Hoeveel provincies heeft Nederland?
- Hoeveel natuurlijke getallen zijn er?
- Hoeveel reële getallen zijn er?

Delft University of Technology

Hoeveel provincies?

- tekeni-yawenre,
- kaksitoista,
- XII,
- twaalf

Delft University of Technology

Hoeveel natuurlijke getallen?

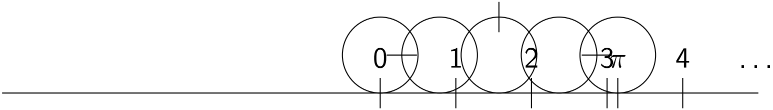
De natuurlijke getallen zijn de getallen die we gebruiken om te tellen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Zo te zien: meer dan één, meer dan twee, meer dan drie, ...

Meer dan eindig veel dus, oneindig veel, maar *hoeveel* is dat?

De reële getallen corresponderen met de punten op een lijn, nadat we twee punten de namen 0 en 1 hebben gegeven.
De plaats van π vinden we door een cirkel met middellijn 1 vanuit 0 naar rechts één omwenteling te laten maken.



We kunnen de natuurlijke getallen als reële getallen beschouwen, er zijn dus ten minste zoveel reële als natuurlijke getallen.
Maar de vraag blijft: *Hoeveel*?

De vragen zijn niet goed gesteld

De vraag “Hoeveel?” is eigenlijk geen goede vraag.

Een verzameling heeft geen intrinsiek ‘aantal elementen’.

Dat is te zien aan de antwoorden op de vraag naar het aantal provincies van Nederland.

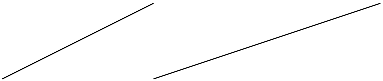
Wie het Mohawk of Fins niet beheerst heeft aan de eerste twee antwoorden niets.

Delft University of Technology

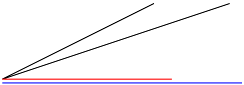
Wat kunnen we doen?

We kunnen vergelijken.

Denk aan lengten: als je wilt weten wie/wat het langst is dan zet/leg je de dingen naast elkaar.



welke is langer?



kijk en vergelijk

En als we de objecten niet kunnen verplaatsen?
Gebruik een stokje en pas de lengten af.

Verzamelingen vergelijken

Met verzamelingen kan zoiets ook

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} & \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} & \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} & \mathrm{l} & \mathrm{m} & \mathrm{n} & \mathrm{o} & \mathrm{p} & \mathrm{q} & \mathrm{r} & \mathrm{s} & \mathrm{t} & \mathrm{u} & \mathrm{v} & \mathrm{w} & \mathrm{x} & \mathrm{y} & \mathrm{z} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \zeta & \eta & \theta & \iota & \kappa & \lambda & \mu & \nu & \xi & \mathrm{o} & \pi & \rho & \sigma & \tau & \upsilon & \varphi & \chi & \psi & \omega \end{array}$$

Kijk en vergelijk.

Op deze manier kunnen we betekenis hechten aan ‘minder’, ‘even veel’ en ‘meer’.

Delft University of Technology

Verzamelingen vergelijken

Voor 'eindige' verzamelingen werkt deze methode in principe altijd:

één van mij, één van jou,
één van mij, één van jou,
één van mij, één van jou,
...

de verzameling die het eerst leeg is heeft minder elementen dan de andere.
Bij gelijk eindigen: even veel.

Delft University of Technology

Vergelijken op afstand

Wat als de verzamelingen niet bij elkaar te brengen zijn?

Neem een stok en maak een kerfje voor elk element van de verzameling hier en neem die kerfstok mee naar de andere.

Vergelijk de andere verzameling met de verzameling kerfjes, klaar.

Die kerfstok kan vaker gebruikt worden.
Markeer de kerfjes die met de ene verzameling corresponderen, ga naar de andere en vergelijk.

Er zijn veel systemen bedacht om aantallen weer te geven.

Al die systemen beschrijven hetzelfde: datgene dat waar wij

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots$$

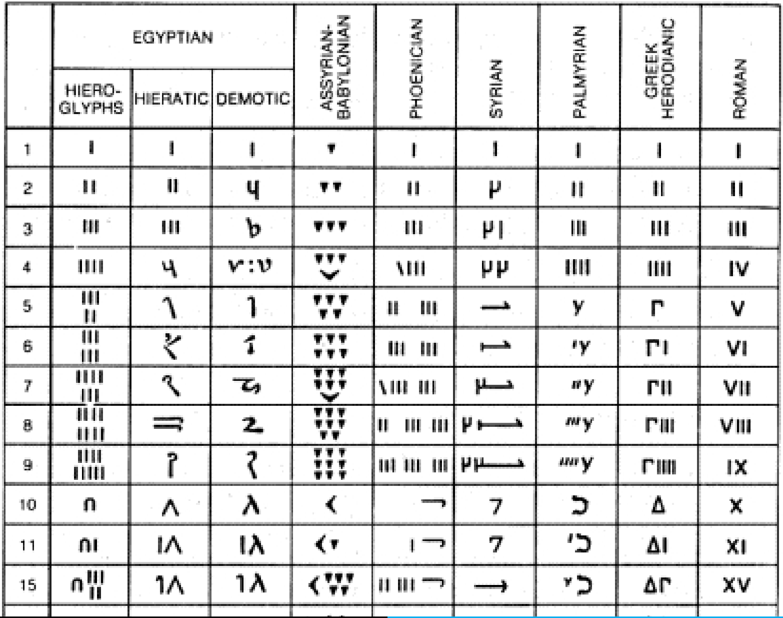
voor gebruiken.

Ze maken een betere boekhouding mogelijk dan kerfstokken.

Na verloop van tijd gaf zo'n systeem het antwoord op de vraag:

hoeveel elementen?

Een aantal kerfstokken/notatiesystemen



Hoeveel natuurlijke getallen?

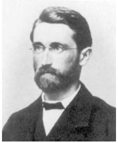
Hoeveel elementen heeft $\mathbb{N}$ (de verzameling der natuurlijke getallen) nu?

Dat kunnen we niet zeggen omdat
we geen punt op onze kerfstok hebben dat met $\mathbb{N}$ *correspondeert*.

Als in het begin moeten we het eerst gaan hebben over 'meer', 'minder' en 'even veel'.

Delft University of Technology

Uit een brief van Cantor aan Dedekind



Halle, d. 29ten Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

De betekenis van Cantor's vraag

Dit was de eerste keer dat deze vraag gesteld werd voor oneindige verzamelingen.

De vraag komt neer op: zijn er even veel natuurlijke getallen als punten op een lijn?

Hierbij is 'even veel' ondubbelzinnig gedefinieerd: er is een massahuwelijk mogelijk waarbij elk natuurlijk getal met één punt op de lijn en elk punt op de lijn met één natuurlijk getal zal trouwen.

Delft University of Technology

In wiskundige termen

In plaats van 'massahuwelijken' spreken we van bijectieve afbeeldingen.

Een afbeelding $f : A \to B$ is bijectief als

- voor elk tweetal verschillende elementen a_1 en a_2 van A geldt dat $f(a_1) \neq f(a_2)$ en
- voor elke $b \in B$ een $a \in A$ bestaat met $f(a) = b$.

Het "één van mij, één van jou" beslist voor eindige verzamelingen in eindige tijd of er een bijectie tussen de verzamelingen bestaat.

Delft University of Technology

Hoe Cantor's vraag te beantwoorden?

Men kan:

- een formule/beschrijving geven van een bijectieve $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ en een bewijs dat deze werkt of
- een bewijs dat zo'n formule/beschrijving niet bestaat.

Het proces van "één van mij, één van jou" werkt hier niet omdat het geen verifieerbare beschrijving oplevert.

Delft University of Technology

Een paar formules

- De formule $n \mapsto 2n$ laat zien dat er *even veel* **even** natuurlijke getallen zijn als natuurlijke getallen.
- De formule

$$n \mapsto (-1)^n \left(\frac{n}{2} + \frac{-1 + (-1)^n}{4} \right)$$

laat zien dat er even veel **gehele** getallen zijn als natuurlijke getallen; de echtparen zijn als volgt

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & -5 & \dots \end{array}$$

Delft University of Technology

Paren en breuken

De formule

$$(m, n) \to \frac{1}{2}(m + n - 2)(m + n - 1) + m$$

laat zien dat er even veel *paren* natuurlijke getallen bestaan als natuurlijke getallen.

Er zijn dus ook even veel (positieve) breuken als natuurlijke getallen.

Delft University of Technology

Het antwoord van Cantor op zijn eigen vraag

Uit: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, 1874*

Stelling

Wenn eine nach irgendeinerm Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* η *(und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe* (4) *nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.*

Delft University of Technology

Wat betekent dit?

Er zijn ten minste twee soorten oneindig: die van $\mathbb{N}$ en die van $\mathbb{R}$ (de verzameling der reële getallen).
Dit geeft ons twee extra kerfjes op de stok; we markeren ze met de symbolen die Cantor ingevoerd heeft:

- $\aleph_0$, de machtigheid van $\mathbb{N}$
- $\mathfrak{c}$, de machtigheid van $\mathbb{R}$

Machtigheid is Cantor's term voor wat we 'het aantal elementen' zouden willen noemen.

Delft University of Technology

Onze kerfstok

Als we oneindige verzamelingen bekijken kunnen we ons dus afvragen of deze even groot zijn als $\mathbb{N}$ of even groot als $\mathbb{R}$.

We vragen dus niet hoeveel elementen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ hebben; we gebruiken ze als modelverzamelingen om mee te vergelijken.

Hier is de kerfstok:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, \aleph_0, \ldots, \mathfrak{c}, \ldots$$

Delft University of Technology

Is er meer?

Eerste vraag: is er iets tussen $\aleph_0$ en $\mathfrak{c}$?

$\aleph_0^2$ misschien?
Dat is de machtigheid van $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, de verzameling van alle paren natuurlijke getallen.

We hebben al een bijectie tussen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ gezien, dus

$$\aleph_0^2 = \aleph_0$$

Met inductie volgt: $\aleph_0^n = \aleph_0$ voor alle n.

Continuümhypothese

Cantor vermoedde, en dacht te kunnen bewijzen, dat er niets tussen $\aleph_0$ en $\mathfrak{c}$ te vinden is.

Dit is Cantor's Continuümhypothese.

Deze is noch te bewijzen, noch te ontkrachten.

We kunnen dat laatste bewijzen.

Is er meer?

Tweede vraag: is er iets boven $\mathfrak{c}$?

Bijvoorbeeld $\mathfrak{c}^2$, de machtigheid van het platte vlak?

Cantor: $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ hebben even veel elementen; dus $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2$.

Er zijn zelfs even veel rijen reeële getallen als er reeële getallen zijn; met behulp van Cantor's symbolen: $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{\aleph_0}$.

Er is meer

Elke verzameling heeft echt minder elementen dan deelverzamelingen.

Als $f : X \to \mathcal{P}(X)$ een willekeurige afbeelding is dan is er géén x met $f(x) = A$, waarbij $A = \{z \in X : z \notin f(z)\}$.

Geen enkele $f : X \to \mathcal{P}(X)$ is dus bijectief.

Delft University of Technology

Er is meer

Dit is van toepassing op $\mathbb{R}$: de machtigheid van $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ is strikt groter dan die van $\mathbb{R}$.

Meer algemeen: er is geen grootste machtigheid.

Kardinaal**getallen**?

Wat we nog niet hebben: een functie

$$X \mapsto |X|$$

met de eigenschap dat

$$|X| = |Y|$$

equivalent is met

$$\text{“er is een bijectie tussen } X \text{ en } Y\text{”}.$$

dat is wat we van de notie ‘aantal elementen’ (of ‘kardinaalgetal’) willen.

Delft University of Technology

Kardinaal**getallen**?

De waarden

- $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ en
- $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

voldoen niet want $\aleph_0$ en $\mathfrak{c}$ waren alleen maar tekentjes op onze kerfstok, geen duidelijke wiskundige objecten.

Delft University of Technology

Kardinaal**getallen**?

Hier is zo'n functie:

- $|\emptyset| = 0$
- $|\{1,\ldots,n\}| = \sum_{i=1}^{n} 2^{-n}$; en elke X even groot als deze verzameling krijgt deze waarde
- $|\mathbb{N}| = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$; en elke aftelbare X krijgt deze waarde
- $|\mathbb{R}| = \pi$; idem voor alles wat even groot is als $\mathbb{R}$
- $|\mathcal{P}^n(\mathbb{R})| = \left.\pi^{\pi^{\pi^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\pi}}}}}}\right\}n$; en alles …

Gek genoeg: voor 99% van de wiskunde voldoet deze functie prima …

… als we genegen zijn de *Gegeneraliseerde* Continuümhypothese aan te nemen.

Dat wil zeggen voor geen enkele oneindige X is er een machtigheid tussen die van X en $\mathcal{P}(X)$.

Delft University of Technology

Maar nu serieus

Kan dat niet wat eenvoudiger/basaler/natuurlijker?

Is er een definitie van $|X|$ die wat verzamelingtheoretischer is?
En die geen menselijke tussenkomst vergt?

Die definitie is er maar het is even wennen.

Delft University of Technology

Wat is een natuurlijk getal?

We hebben $\mathbb{N}$ als standaard representant van de machtigheid $\aleph_0$ gekozen en $\mathbb{R}$ als die van $\mathfrak{c}$.

Hoe zit dat met de eindige machtigheden?

Von Neumann heeft daar wat op gevonden.

De lege verzameling, $\emptyset$, is een perfecte representant voor de machtigheid 0.

Delft University of Technology

Wat is een natuurlijk getal?

- $\{\emptyset\}$ is een prima representant voor 1
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ is een prima representant voor 2
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ is een prima representant voor 3
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ is een prima representant voor 4
- ...

Delft University of Technology

Wat is een natuurlijk getal?

Von Neumann draaide dit om en maakte er een definitie van:

- We definiëren $0 = \emptyset$.
- $1 = \{\emptyset\}$, dus $1 = \{0\}$.
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, dus $2 = \{0, 1\}$.
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, dus $3 = \{0, 1, 2\}$.
- $4 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Elk natuurlijk getal is de verzameling van zijn voorgangers.
Zo kunnen de natuurlijke getallen geheel in termen van verzamelingen gedefinieerd worden.

Delft University of Technology

Eindige definitie van $\mathbb{N}$

Merk op, met deze definitie volgt $n + 1 = n \cup \{n\}$.

De verzameling $\mathbb{N}$ der natuurlijke getallen is hiermee de *kleinste* verzameling met de volgende twee eigenschappen

- $\emptyset \in \mathbb{N}$, en
- als $x \in \mathbb{N}$ dan $x \cup \{x\} \in \mathbb{N}$.

Dit is een definitie zonder ... er in en in eindig veel symbolen op te schrijven.

Dit leidde tot een bijzondere klasse van verzamelingen:

ordinaalgetallen.

Een ordinaalgetal is een verzameling x met

- als $y \in x$ en $z \in y$ dan $z \in x$, (transitiviteit)
- als $y, z \in x$ dan $y \in z$ of $y = z$ of $z \in y$ (lineair geordend door $\in$)
- als $a \subseteq x$ dan heeft a een minimum ten opzichte van $\in$ (welgeordend door $\in$)

Delft University of Technology

- Elk natuurlijk getal, zoals hierboven door Von Neumann gedefinieerd, is een ordinaalgetal,
- $\mathbb{N}$ is het ook;
- met Cantor noteren we $\mathbb{N}$-als-ordinaalgetal ook wel als ω.

De ultieme meetlat

De ordinaalgetallen vormen de ultieme meetlat.

We kunnen nu de machtigheid of het kardinaalgetal geheel binnen de verzamelingenleer definiëren:

Het kardinaalgetal van X is het kleinste ordinaalgetal dat even groot is als X.

De ordinaalgetallen vormen een wat fijnmaziger structuur dan die der machtigheden.

Delft University of Technology

Wat met $\mathbb{R}$?

Verzamelingtheoretisch geldt: $\mathbb{N} = \omega = \aleph_0$.

Hoe zit het met $\mathfrak{c}$, de machtigheid van $\mathbb{R}$?

Cantor's Continuümhypothese komt neer op

> "$\mathbb{R}$ is net zo groot als het eerste overaftelbare ordinaalgetal".

De plaats van $\mathfrak{c}$ is dus niet te bepalen; dat wil zeggen niet met behulp van de gangbare spelregels van de verzamelingenleer.

TU Delft
Delft University of Technology

$\mathbb{R}$ heeft meer elementen dan $\mathbb{N}$

Stelling

Wenn eine nach irgendeinerm Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* η *(und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe* (4) *nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.*

Met andere woorden: bij elke koppeling van natuurlijke getallen aan reële getallen blijven er altijd reële muurbloempjes over.

Delft University of Technology

Het bewijs

Cantor's bewijs maakte gebruik van de *volledigheid* van $\mathbb{R}$.
Hij begon met een rij

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

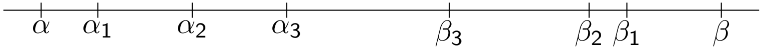
van reële getallen en een willekeurig interval

$$(\alpha, \beta)$$

Hij liet toen zien dat er een reëel getal $\eta \in (\alpha, \beta)$ bestaat ongelijk aan alle ω_ν.

Delft University of Technology

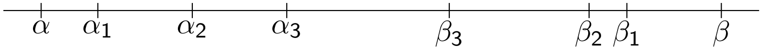
Het bewijs



- Laat α_1 en β_1 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α, β) liggen en wel zó dat $\alpha_1 < \beta_1$.
- Laat α_2 en β_2 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_1, β_1) liggen en wel zó dat $\alpha_2 < \beta_2$.
- Laat α_3 en β_3 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_2, β_2) liggen en wel zó dat $\alpha_3 < \beta_3$.
- ...

Delft University of Technology

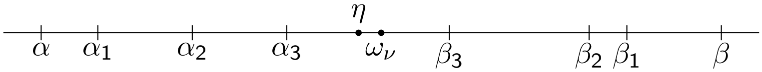
Het bewijs



Bedenk zelf waarom

- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$,
- $\omega_3, \omega_4 \notin (\alpha_2, \beta_2)$,
- $\omega_5, \omega_6 \notin (\alpha_3, \beta_3)$,
- $\ldots$

Het bewijs

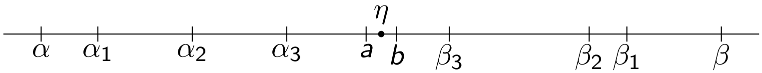


Geval 1: de constructie stopt bij n.

Waarom zou dat kunnen gebeuren?

Nog maar één (of geen) ω_ν in (α_n, β_n); dan is η gauw gevonden.

Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.
Laat $a = \sup_n \alpha_n$ en $b = \inf_n \beta_n$.
Dan $a \leqslant b$.
Neem $\eta \in [a, b]$, klaar!

Verder lezen

Website: `fa.its.tudelft.nl/~hart`

K. P. Hart.
De Continuümhypothese, Nieuw Archief voor Wiskunde, **10** (2009), 33–39.