Wat betekent ‘oneindig’ in de Wiskunde?

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Sittard, 14 Februari 2019

Oneindig betekent niet-eindig.

Dus, alternatieve titel:

Delft University of Technology

Wat betekent ‘eindig’ in de Wiskunde?

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Sittard, 14 Februari 2019

Nationale Wetenschapsagenda

Maar . . .

De woorden 'oneindig' en 'oneindigheid' komen samen 25 keer voor als trefwoord in een vraag voor de Nationale Wetenschapsagenda.

De woorden 'eindig' en 'eindigheid' samen 6 keer.

Daarom houden we het op de eerste titel, dat verkoopt beter.

Wat betekent ‘oneindig’ in de Wiskunde?

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Sittard, 14 Februari 2019

Delft University of Technology

Van Dale

De allereerste editie (1864):

- eindig: bn. en bijw. een einde hebbende.
- oneindig: bn. en bijw. zonder einde;
  (fig.) buitengemeen groot;
  oneindig groot: door geene maat te bepalen;
  oneindig klein: nul.

Delft University of Technology

Chambers

13th Edition (2014):

finite *adj* having an end or limit; subject to limitations or conditions, opp to *infinite*. [l. *finitus*, pap of *finire* to limit]

infinite *adj* without end or limit; greater than any quantity that can be assigned [*maths*]; extending to infinity; vast; in vast numbers; inexhaustible; infinitated (*logic*)

Delft University of Technology

Interessant . . .

'eindig' staat tegenover 'oneindig', en toch . . .

'oneindig' heeft meer woorden nodig dan 'eindig'

ook de woordenboeken hebben meer moeite met 'oneindig'

Van Dale (huidige versie, on-line)

De wiskunde is wel gedefinieerd als de wetenschap van het oneindige, die dit met eindige middelen tracht te beheersen.

Laten we dat dan maar eens proberen.

Eenvoudig verband

De Wiskunde houdt het simpel:

‘oneindig’ is ‘niet-eindig’

dus

‘eindig’ is ‘niet-oneindig’

een definitie van de één geeft meteen een definitie van de ander.

Eindig

Twee ‘eindige’ situaties:

met grenzen, begrensd het interval $[0, 1]$ is een *eindig interval*
begrensd in aantal het interval $[0, 1]$ is niet een *eindige verzameling*

Eindig/Oneindig in de eerste situatie

Dit is het gebied van de Wiskundige Analyse, ‘oneindig’ wordt daar meestal met

$$\infty$$

aangeduid.

In de exacte formuleringen is ∞ nooit terug te vinden, bijvoorbeeld $(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Dus dit laten we voor wat het is.

Op naar . . .

Delft University of Technology

Eindig/Oneindig in de tweede situatie

Eerst goed afspreken wat ‘begrensd in aantal’ of ‘eindig in aantal’ betekent.

Een verzameling, E, is *eindig* als er een natuurlijk getal n is zó dat E *even groot* is als $\{i : 0 \leqslant i < n\}$.

A en B zijn even groot: we kunnen paren (a, b) vormen met telkens een a uit A en b uit B, en zó dat elke a uit A en elke b uit B precies één keer voorkomt.

Delft University of Technology

Voorbeeld

Bijvoorbeeld: de verzameling maanden in een jaar en de verzameling provincies van Nederland zijn even groot: een koppeling is bijvoorbeeld

(januari,Groningen), (februari,Drente), (maart,Friesland), (april,Overijssel), (mei,Flevoland), (juni,Gelderland), (juli,Utrecht), (augustus,Noord-Holland), (september,Zuid-Holland), (oktober,Zeeland), (november,Noord-Brabant), (december,Limburg).

Zie ook NWT Magazine, februari 2013.

Delft University of Technology

Eindig

Hier is de definitie nog een keer, officieel.

Een verzameling, E, is eindig als er een natuurlijk getal n en een bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to E$ zijn.

Eindig

Terzijde:
In de Verzamelingenleer definiëren we de natuurlijke getallen zó dat $n = \{i \in \mathbb{N} : i < n\}$.
Dus $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, enz

Een verzameling, E, is eindig als er een natuurlijk getal n en een bijectie $f : n \to E$ zijn.

Aantal elementen

Stelling

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is er géén bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to \{i : 0 \leqslant i \leqslant n\}$.

Gevolg

De n uit de definitie van 'eindig' is uniek.

Voor eindige verzamelingen kunnen nu we 'het aantal elementen' afspreken als "die unieke n ...".

Aantal elementen

Die afspraak is wel degelijk nodig.

Een verzameling heeft geen intrinsiek ‘aantal elementen’.

Oneindig

Dus, . . . , een verzameling, O, is oneindig als er geen natuurlijk getal n is met een bijectie $f : n \to O$.

Eigenlijk sta je, bij een oneindige verzameling, met lege handen.

Je kunt, bijvoorbeeld, het aantal elementen niet afspreken.

Oneindig

Even terug naar *Chambers*, bij ‘infinite’ stond:

greater than any quantity that can be assigned [*maths*];

Dat klinkt bekend

Delft University of Technology

Euclides

Stelling (De Elementen, Boek IX, Propositie 20)

De priemgetallen zijn meer dan elke voorgegeven hoeveelheid priemgetallen.

Met andere woorden: als E een eindige verzameling priemgetallen is dan is er een priemgetal dat niet in E zit.

De verzameling priemgetallen is dus oneindig.

Delft University of Technology

Euclides

Euclides, en Chambers, zitten dus goed met oneindigheid.

Echter . . .

Ook uit Chambers

infinite set *n* (*maths*) a set that can be put into one-one correspondence with part of itself

Voor alle duidelijkheid: *proper* part

Dit komt niet uit de lucht vallen.

Delft University of Technology

Richard Dedekind (1888)

Ein System S heißt *unendlich*, wenn es einem echten Teile ähnlich ist; im entgegengesetzen Falle heißt S ein *endliches* System.

Voorbeeld

Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich.

Delft University of Technology

Richard Dedekind (1888)

In bekendere termen: Dedekind noemde een verzameling, S, *oneindig* als een deelverzameling T van S bestaat met $T \neq S$, en een bijectie $f : S \to T$.

Voorbeeld

De afbeelding die x op de gedachte aan x afbeeldt is injectief; deze is niet surjectief want niet elk object, bijvoorbeeld Dedekind zelf, is een gedachte aan een object.

TUDelft
Delft University of Technology

Wat nu?

Nu hebben we een definitie van ‘oneindig’ met een definitie van ‘eindig’ als ‘niet-oneindig’.

Is dit iets anders?

Voor alle zekerheid spreken we van Dedekind-oneindig en Dedekind-eindig.

Delft University of Technology

Dedekind-oneindig is handig om te hebben

Stelling

Equivalent zijn

1. X *is Dedekind-oneindig*
2. *er is een injectieve afbeelding* $f : \mathbb{N} \to X$.
3. X *heeft evenveel elementen als* $X \cup \{p\}$ *voor (een)* p *niet in* X

Delft University of Technology

Relatie

‘eindig’ impliceert ‘Dedekind-eindig’

en dus, contrapositief:

‘Dedekind-oneindig’ impliceert ‘oneindig’

En omgekeerd?

Delft University of Technology

Opgave

Voor straks in de theepauze.

- Bewijs de implicatie "oneindig $\Rightarrow$ Dedekind-oneindig", dat wil zeggen, bewijs dat als X oneindig is er een injectieve afbeelding $f : \mathbb{N} \to X$ is.
- Loop je oplossing zorgvuldig na en geef aan waarom hij niet deugt.

Hoezo?

Delft University of Technology

Helaas ...

De implicaties zijn niet omkeerbaar.

Die ‘niet-triviale wiskunde’ uit de aankondiging?

Die zit in het bewijs dat de implicatie

$$\text{oneindig} \Rightarrow \text{Dedekind-oneindig}$$

niet bewijsbaar is.

Natuurlijke getallen

Dedekind gebruikte zijn oneindige verzameling om natuurlijke getallen te definiëren.

Neem zo'n verzameling S, met een bijectieve afbeelding $f : S \to T$, waar T een *echte* deelverzameling van S is.

Neem $x \in S \setminus T$ en laat N de *kleinste* deelverzameling van S zijn met $x \in N$ en $f(y) \in N$ als $y \in N$.

Delft University of Technology

Natuurlijke getallen

Dedekind bewees netjes dat zo'n N bestaat.

Dedekind bewees ook nauwkeurig dat je met N precies kunt doen wat je met (de) natuurlijke getallen wilt doen.

Waarom deed hij dat?
In die tijd was er geen echte, formele, wiskundige, definitie van natuurlijke getallen.

Delft University of Technology

Natuurlijke getallen

Verder: met welke Dedekind-oneindige verzameling je ook begint: de N-en die je maakt zijn ononderscheidbaar (isomorf).

Dedekind maakte dus de natuurlijke getallen.

Natuurlijke getallen

Ten slotte:
die definitie van natuurlijke getallen uit de verzamelingenleer?

Begin met een S die voldoet aan $\emptyset \in S$ en

$$\text{als } x \in S \text{ dan ook } x \cup \{x\} \in S$$

De kleinste deelverzameling van S die hier aan voldoet, dat is de $\mathbb{N}$ van de verzamelingenleer.

Delft University of Technology

Natuurlijke getallen

Oh, en het bestaan van zo'n S is één van de axioma's van de Verzamelingenleer.

Het is geen stelling.

Verder lezen

Website: `fa.its.tudelft.nl/~hart`

Leon van den Broek en Arnout van Rooij,
Blik op oneindig, Zebra-reeks 25, Epsilon Uitgaven (2007).

Klaas Pieter Hart,
Verzamelingenleer, Dictaat van een cursus in Leiden (2015), zie website.