MATERIAAL VOOR "EEN TOUWTJE OM DE AARDE"

K. P. HART

Inleiding

Hierbij het materiaal dat bij de lezing *Een touwtje om de Aarde* gebruikt is.
In plaats van de argumenten opnieuw op te schrijven heb ik ervoor gekozen de oorspronkelijke pagina's uit Pythagoras te gebruiken en de oorspronkelijke schrijvers zelf aan het woord te laten.
Ik kan iedereen aanraden eens op `pyth.eu` in het archief te grasduinen; er staat veel moois in de oude nummers.

1. Jaargang 4, nummer 5, 1965

Dit is een gevarieerd nummer met niet alleen de eenvoudige versie van het touwtje om de aarde, maar ook een artikel over Erathostenes' bepaling van de omtrek van de aarde, iets over Chinese wiskunde. Verder staat er vrij veel meetkunde in.

Date: 9 april 2022.

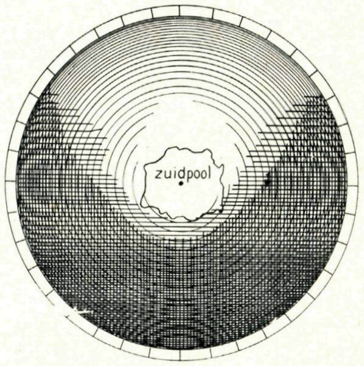
pythagoras

jaargang 4 no 5

°Een touw rond de evenaar I

Stel je eens voor, dat de aarde een gladde bol was, zonder zeeën en zonder bergen. En stel je dan eens voor, dat we om die gladde aarde een touw zouden spannen over de evenaar. Weet je, hoe lang dat touw dan zou worden? Neen? Dat is niet zo erg, maar we zullen je het even verklappen: ongeveer 40.000 km.
Maar stel je nu eens voor, dat we dat touw zouden doorknippen en er één meter tussen zouden knopen. We zouden het dan overal kunnen optillen tot het weer een cirkel zou vormen concentrisch met de evenaar. Zo iets als in fig. 1.

Fig. 1



Hoe hoog zou het dan overal boven de aarde zijn? Zou er bijvoorbeeld een vlieg onder door kunnen?
Misschien ken je de frappante uitkomst al; zo niet, dan is het eenvoudig die te berekenen. Je hoeft er alleen maar voor te weten, dat de omtrek van een cirkel de lengte $2\pi R$ heeft, als R de lengte van de straal is. Voor π kun je wel ongeveer 3,14 rekenen.
Dikwijls wordt dit vraagstukje op een andere manier gegeven. Dan wordt gevraagd: Als we het touw, dat rondom de evenaar gespannen was, nu eens overal 1 m boven het aardoppervlak zouden optillen, hoeveel langer zouden we het dan moeten maken? Als je iemand laat schatten, dan lopen deze schattingen uiteen van 100 tot 10.000 m.
Je vindt een bespreking van deze beide vragen op bldz. 114.

De afstanden v en b worden gemeten tot de spiegel. Laten we nu echter eens veronderstellen, dat het voorwerp de afstand p tot F en het beeld de afstand q tot F heeft, dan is $v = p + f$ en $b = q + f$.
De formule wordt dan:

$$\frac{1}{p+f} + \frac{1}{q+f} = \frac{1}{f}$$

Na enige herleiding blijkt, dat hieruit volgt $pq = f^2$.
Stellen we nu nog voor het gemak $f = 1$, dan herkennen we de formule voor de inversie.

Een touw rondom de evenaar II (zie bldz. 97)

Zoals we weten, is de omtrek van een cirkel met straal R gelijk aan $2\pi R$. Is nu in het eerste der beide problemen de straal x m groter geworden door het touw 1 m te verlengen, dan is dus

$$2\pi(R + x) = 2\pi R + 1$$

Daaruit lezen we af $\quad 2\pi x = 1$

Dus $\quad x = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$ m.

We zien, dat het touw overal ongeveer 16 cm opgetild zou moeten worden. Dat is meer dan de meeste mensen schatten.
Bij het tweede probleem werd de straal van de cirkel, die door het touw wordt gevormd 1 m groter, dus dan vinden we voor de nieuwe omtrek

$$2\pi(R + 1) \text{ m} = (2\pi R + 2\pi) \text{ m}$$

De omtrek is 2π m groter geworden, dat is ongeveer 6,28 m. Deze frappant kleine uitkomst is onafhankelijk van de lengte van de straal. Hadden we in plaats van de aarde een Edammer kaasje genomen, dan was de uitkomst weer 6,28 m geweest.

Het bovenstaande bracht ons op een paar vragen, die je eens moet overwegen:

1. Wanneer we de straal van een cirkel met 1 cm verlengen, dan wordt zijn omtrek een constant getal groter. Dat wil zeggen een getal, dat onafhankelijk is van de grootte van de straal.
   Is het nu ook zo, dat de omtrek van een vierkant met een constant getal vermeerderd wordt, als we zijn halve diagonaal met 1 cm verlengen?

2. Jaargang 24, nummer 1, 1984

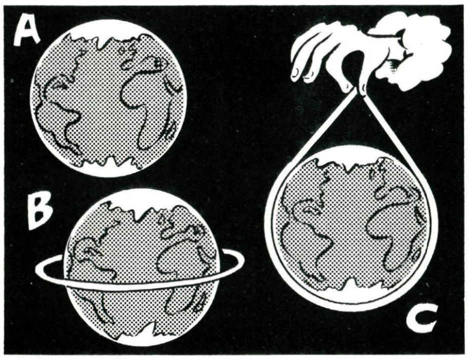
Jan van Maanen leverde twee stukken over Leibniz. Klaas Lakeman schreef over Geheimschriften. En de Pythagoras-Olympiade was al aan opgaven 70, 71, en 72 toe.

Eén metertje meer...

Stel de aarde voor als een volkomen gladde bol met een straal van 6378 km. Langs de evenaar is een touw strak gespannen. De lengte ervan is $2\pi \times 6378$ km.
Wanneer je nu dat touw overal precies één meter boven het aardoppervlak wilt hebben, hoeveel kilometer touw heb je dan méér nodig?
Het antwoord is: helemaal geen kilometers, maar iets meer dan 6 meter!
Reken maar mee! Zeg dat de straal van de aarde r meter is. Dan is de lengte van het oorspronkelijke touw $2\pi r$ meter. Het nieuwe touw vormt een cirkel met een straal van $r + 1$ meter. De omtrek wordt dus $2\pi(r + 1)$. Het verschil is dan 2π meter $\approx 6{,}28$ meter.
Je ziet trouwens dat het niets uitmaakt of je dat nu bekijkt voor de aarde, de maan, een voetbal of een sinaasappel. Steeds heb je 6,28 meter extra touw nodig, als je de straal 1 meter groter maakt.

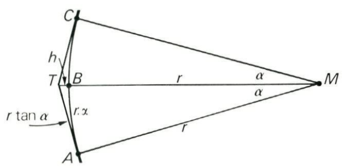
De aarde opgehangen

Maar nu iets anders. Maak het (strak rond de aarde gespannen) touw één meter langer. Stel je voor dat een reus de aarde met dat touw aan één punt optilt (en dat het touw daarbij niet uitrekt!). Hoeveel meter zal dat punt dan boven het aardoppervlak komen?



Touw strak om de aarde (A), zes meter langer en het komt één meter boven de oppervlakte (B), één meter langer en je hangt de aarde eraan op (C).

Gezien de totale lengte van de aardomtrek is die ene meter extra natuurlijk maar een schijntje, dus erg hoog kan dat punt niet komen, denk je misschien.
Maar daar kun je je lelijk in vergissen. Reken maar weer mee!
Hieronder zie je een situatieschets. Het touw wordt bij T opgetild. Bij A en C komt het weer op aarde terecht. M is het middelpunt van de aarde, r de straal, dus $r = 6378000$ m. B is het punt op aarde recht onder T, en $h = BT$ is de te berekenen hoogte.



We geven hoek AMT aan met α. Als we α uitdrukken in radialen, is de lengte van boog AB – dus de afstand van A en B langs het aardoppervlak – gelijk aan $r\alpha$.
Verder is $AT = \tan\alpha$, en omdat $AT + TC$ een meter langer is dan boog ABC, geldt (delen door 2):

$r\tan\alpha - r\alpha = \frac{1}{2}$, dus $\tan\alpha - \alpha = \frac{1}{2r}$. (1)

Verder zie je dat $\cos\alpha = \frac{r}{r+h}$, en dat kun je omwerken tot $h = r\{(1/\cos\alpha) - 1\}$ (2)

Aan vergelijking (1) zie je dat $(\tan\alpha - \alpha)$ verschrikkelijk klein is (want $r = 6378000$). Dat betekent (denk aan de grafiek van de tangensfunctie) dat ook hoek α zelf ontzettend klein moet zijn.
Nu geldt voor kleine waarden van α:

$$\frac{\tan\alpha - \alpha}{\alpha} \approx \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad \frac{(1/\cos\alpha) - 1}{\alpha^2} \approx \frac{1}{2}.$$

Toets het maar eens in op je rekenmachine (denk eraan in radialen werken!). Zesdeklassers kunnen de juistheid van die benaderingen misschien ook bewijzen met limieten en de regel van De L'Hospital.
In elk geval kunnen we zonder merkbare fouten te maken (1) en (2) vervangen door

$$\frac{\alpha^3}{3} = \frac{1}{2r} \quad (1') \qquad \text{en } h = r\frac{\alpha^2}{2} \quad (2')$$

Dit geeft samen $h = \frac{r}{2}\left(\frac{3}{2r}\right)^{2/3} = 121{,}50..$ m. En daar past de domtoren uit Utrecht met z'n 112 meter nog ruim onder!

3. Jaargang 44, nummer 2, 2004

In deze jaargang veel Topologie, met veel bijdragen van Jan Aarts. In dit nummer over de Stelling van Jordan en de Meren van Wada.
Dion Gijswijt verzon veel problemen en de Olympiade was bij nummer 112 en 113 aangeland.

door **Klaas Pieter Hart**

We spannen een touw om de aarde, maken het een beetje langer en proberen het weer strak te trekken. Hoe hoog komt het dan te hangen?

Een touwtje om de aarde

Vrijwel iedereen kent het volgende probleem wel. We spannen een (niet rekbaar) touw om de aarde, zeg over de polen langs de nulmeridiaan (en de 180-meridiaan natuurlijk). Aan de noordpool knippen we het touw open en voegen een stuk van één meter lang in. Als we het touw overal even hoog optillen, hoe hoog komt het dan boven de aarde te hangen?

Het antwoord, ongeveer 16 centimeter, verbaast de meeste mensen, tot je het netjes voorrekent. Oorspronkelijk is het touw $2\pi R$ lang, waarin R de straal van de aarde (in meters) is. Waar we naar vragen is de straal van de cirkel waarvan de omtrek één meter langer is, met andere woorden: bepaal R' zó dat $2\pi R' = 2\pi R + 1$. Dat is heel makkelijk: $R' = R + \frac{1}{2\pi} \approx R + 0{,}159$.

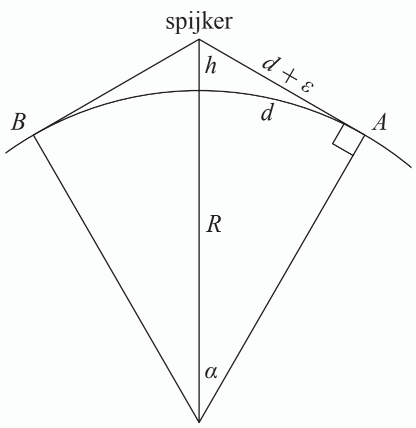
De berekening laat zien dat de waarde van R er niet toe doet: als de omtrek van een willekeurige cirkel één meter langer wordt gemaakt, wordt de straal bijna 16 cm langer.

Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het overal gelijkelijk op. Kan er een muis onderdoor?

Aan een spijker

We bekijken nu een ander probleem. Stel dat we het touw alléén aan de noordpool optillen en strak trekken – alsof we de aarde met behulp van het touw aan een spijker ophangen – hoe hoog komt het hoogste punt dan?

Het volgende plaatje geeft een situatieschets.



Hierin is R de straal van de aarde, ε de helft van het ingelaste stukje (een halve meter dus) en h de gevraagde hoogte. De boog d verbindt de punten waar het touw los komt van het aardoppervlak. De hoek bij A is recht, omdat de lijn van A naar de spijker een raaklijn aan de cirkel is, dankzij het straktrekken.

Pas de stelling van Pythagoras toe:

$$(R+h)^2 = R^2 + (d+\varepsilon)^2$$

en dus $\quad h + R = \pm\sqrt{R^2 + (d+\varepsilon)^2}$, ofwel

$$h = -R \pm \sqrt{R^2 + (d+\varepsilon)^2}.$$

Omdat h positief is, moeten we

$$h = \sqrt{R^2 + (d+\varepsilon)^2} - R$$

hebben. Hierin kunnen we R buiten de haakjes halen, zodat we

$$h = R\left(\sqrt{1 + \left(\frac{d+\varepsilon}{R}\right)^2} - 1\right) \qquad (1)$$

krijgen. Hierin is d nog onbekend. Nu geldt $d = \alpha R$ of $\frac{d}{R} = \alpha$ (we werken in radialen) en het blijkt wat makkelijker te zijn een vergelijking voor α op te stellen.

Uit de schets kunnen we aflezen dat

$$\tan\alpha = \frac{d+\varepsilon}{R}$$

en dus

$$\tan\alpha = \alpha + \frac{\varepsilon}{R},$$

ofwel

$$\tan\alpha - \alpha = \frac{\varepsilon}{R}. \qquad (2)$$

Span een touw om de aarde. Maak het 1 meter langer en til het bij de noordpool op. Kan er een ijsbeer onderdoor?

We krijgen α dus als oplossing van de vergelijking (2).

Nu wordt het tijd de getallen in te gaan vullen. De omtrek van de aarde is, per definitie, 40.000 km, zodat $R = 40.000.000/(2\pi)$ m, verder $\varepsilon = \frac{1}{2}$ m. We moeten dus

$$\tan\alpha - \alpha = \frac{\pi}{40.000.000}$$

oplossen. Je kunt dit zó door de *solver* van je grafische rekenmachine laten doen (`X=1` als beginvoorwaarde gebruiken): $\alpha \approx 0{,}006176 = 6{,}176 \times 10^{-3}$ en daarmee $d \approx 247{,}040$ km. Hoewel het interessant is te zien hoe ver van de noordpool het touw recht wordt, hebben we d niet echt nodig voor de berekening; in (1) vervangen we $\frac{d}{R}$ door α:

$$h = R\left(\sqrt{1+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{R}\right)^2}-1\right).$$

Mijn rekenmachientje geeft, na alles invullen: $h \approx 121{,}4$ m.

Opgave 1. Doe de berekening nogmaals,
32 maar nu met slechts één centimeter extra. Aangenomen dat het touw licht genoeg is, kun je het dan zonder hulpmiddelen strak krijgen?

Een snelle benadering

De hoek α die hierboven gevonden is, is behoorlijk klein. In dat geval kan $\tan\alpha$ goed benaderd worden met $\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3$ (zie het stukje over $\cos x$ en $\sin x$ in de vorige *Pythagoras*), zodat (2) verandert in een bijnagelijkheid:

$$\frac{1}{3}\alpha^3 \approx \frac{\varepsilon}{R}.$$

De breuk $\frac{d+\varepsilon}{R}$ is ook heel klein en voor heel kleine x geldt $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$; daarmee kunnen we (1) omwerken tot

$$h \approx \frac{1}{2}R\left(\frac{d+\varepsilon}{R}\right)^2 \approx \frac{1}{2}R\left(\alpha+\frac{1}{3}\alpha^3\right)^2.$$

Als we het kwadraat uitwerken, komt er

$$h \approx \frac{1}{2}R\left(\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^4+\frac{1}{9}\alpha^6\right).$$

Als we de getallen weer invullen, krijgen we $R\alpha^2 = 242{,}8$, $R\alpha^4 = 0{,}009$ en $R\alpha^6 = 3{,}5 \times 10^{-7}$. Dit betekent dat we de vierde en zesde machten wel weg kunnen laten en de volgende benadering van h gebruiken:

$$h \approx \frac{1}{2}R\alpha^2.$$

Als we verder nog bedenken dat $\alpha \approx \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{R}}$, dan komen we tot de volgende uitdrukking voor h:

$$h \approx \frac{1}{2}\sqrt[3]{9R\varepsilon^2}.$$

Als we dan ook nog de waarde van R invoeren, houden we uiteindelijk de volgende benadering over:

$$h \approx 50\sqrt[3]{\frac{360\varepsilon^2}{2\pi}}. \qquad (3)$$

Dit geeft niet echt een ander antwoord dan de berekening in het begin: als we $\varepsilon = 0{,}5$ invullen, komen we via (3) ook uit op $h \approx 121{,}4$ m.

Opgave 2. Vul $\varepsilon = 0{,}005$ in. Hoe groot is het verschil ten opzichte van het antwoord op opgave 1?

Opgave 3. Onderzoek hoe goed de benadering $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$ is. Vergelijk bijvoorbeeld $(1+\frac{1}{2}x)^2$ met $1 + x$; voor welke x is het verschil klein genoeg om weg te laten? Was in ons voorbeeld de benadering gerechtvaardigd?

Maplecode. Voor degenen die zelf aan het rekenen willen slaan. Hier zijn de Maple-commando's die ik zelf gebruikt heb. Ze zijn makkelijk om te zetten naar je favoriete programmeertaal.

```
> # Oplossing 1984
;
> restart;
> r:=6378000;
> rr:=6400000;
> h1984:=(r/2)*(3/(2*r))^(2/3);
> h1974:=(rr/2)*(3/(2*rr))^(2/3);
> evalf(h1984); evalf(h1974);
> # oplossing 2004
;
> R:=40000000/(2*Pi); evalf(R);
> evalf(r-R);  ## dat scheelt bijna 12km
;
> epsilon:=1/2;
> ## eerst ‘exact’
;
> vergelijking1 := tan(alpha)-alpha=epsilon/R;
> h:=alpha->R*(sqrt(1+(alpha+epsilon/R)^2)-1);
> alpha_exact:=fsolve(vergelijking1,alpha, 0..1);
> h_exact:=h(alpha_exact);
> d:=R*alpha_exact;  ## waar komt het touw los?
;
> ## met behulp van Taylor
;
> alpha_benadering:=root[3](3*epsilon/R);
> h_ben:=alpha->R*alpha^2/2;
> h_benadering:=h_ben(alpha_benadering); evalf(h_benadering);
> h_exact-h_benadering; evalf(%);
>
;
```

4. Jaargang 40, nummer 4, 2001

Een stapje terug in de tijd; de Olympiade was tot nummers 69 en 70 gevorderd (de nummering was ooit weer opnieuw begonnen). Veel aandacht voor wiskundige spelletjes en verder van alles wat.

Van Amsterdam

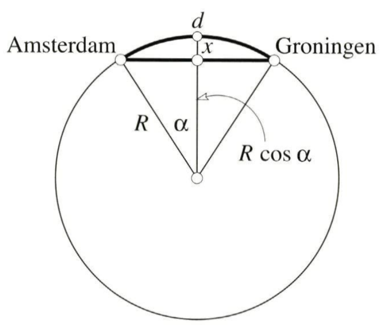
Voor kleine hoeken kun je de waarden van sinus en cosinus makkelijk schatten. We zullen zien hoe dat gaat en hoe je die schattingen kunt gebruiken.

Een tijdje geleden hoorde ik van iemand de volgende quizvraag:
Je boort een kaarsrechte tunnel van de Dam in Amsterdam naar de Martinitoren in Groningen (onderlinge afstand ongeveer 150 kilometer). Hoe diep ligt die tunnel dan in het midden onder de grond? Is de diepte:

a) minder dan 10 meter;
b) meer dan 10 meter en minder dan 100;
c) meer dan 100 meter.

Een berekening

Deze lengte kun je rechttoe-rechtaan berekenen. We zoeken de lengte van het lijnstukje x in figuur 1. De hoek α is $d/2R$ radialen. Uit figuur 1 lezen we af dat $x = R - R\cos\alpha$.



Figuur 1.

Met behulp van de volgende gegevens kunnen we x bepalen: de afstand van de Dam naar de Martinitoren is hemelsbreed $d = 146{,}911$ kilometer, de straal van de aarde is $R = 6378{,}388$ kilometer. Dan is $\alpha = d/2R = 0{,}0115163$ radialen. Met behulp van een rekenmachine kun je $x = R - R\cos\alpha$ dan zo uitrekenen.

Zonder rekenmachine

Nu had ik geen rekenmachine bij me, maar toch kon ik de vraag oplossen. De hoek α is nogal klein. Dan geldt dat $\cos\alpha$ ongeveer gelijk is aan $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. In formulevorm schrijven we dit als:

$$\cos\alpha \approx 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.$$

Oftewel $1 - \cos\alpha \approx \frac{1}{2}\alpha^2$, waarbij het $\approx$-teken 'ongeveer gelijk' betekent. We vinden dus:

$$\begin{aligned} x &= R\,(1 - \cos\alpha) \\ &\approx R \cdot \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{d^2}{8R} \approx \frac{150^2}{8 \times 6400} \\ &= \frac{225}{512} \approx 0{,}450 \text{ kilometer} \end{aligned}$$

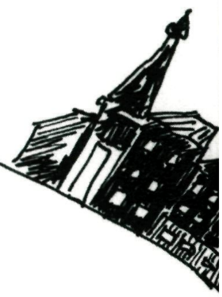
Hierbij heb ik voor het gemak d afgerond tot 150 en R tot 6400. De gezochte afstand is dus ongeveer 450 meter. Antwoord c) zal dus wel goed zijn.

Hoe kan dat nou?

Hoe kwam ik erbij dat $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$? Bekijk figuur 2. Hierin zie je dat als de hoek α klein is, $\sin\alpha$ en α bijna aan elkaar gelijk zijn. Dus geldt dan $\sin\alpha \approx \alpha$. We passen de hoekverdubbelingsformule voor de cosinus toe: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$.

door Klaas Pieter Hart

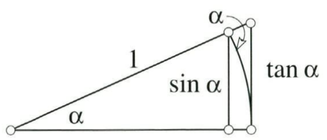
naar Groningen



Door $a = \frac{1}{2}\alpha$ in te vullen krijgen we

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$. Dus:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= 1 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha .\\ &\approx 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2.\end{aligned}$$



Figuur 2.

Mag dat zomaar?
Uit een plaatje hebben we dus afgelezen dat $\sin\alpha \approx \alpha$ en daaruit hebben we afgeleid dat $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. Maar wat betekent $\approx$ nu precies? Eigenlijk willen we weten hoe goed die benaderingen zijn. Dat is met een beetje werk redelijk eenvoudig te doen.
Om te beginnen geldt $\sin\alpha < \alpha$. Uit $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ volgt dan meteen dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.
Uit figuur 2 kunnen we ook aflezen dat $\alpha < \tan\alpha$. Het afgebeelde cirkelsegment heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\alpha$ (immers, de oppervlakte van een cirkelsegment met booglengte π heeft oppervlakte $\frac{1}{2}\pi$).
De oppervlakte van de grote driehoek is $\frac{1}{2}\tan\alpha$. Hieruit volgt dat $\frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, zodat $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$. Omdat we al gezien hadden dat $\cos\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$, vinden we $\sin\alpha > \alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$.

Conclusie:

$$\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha^3 < \sin\alpha < \alpha.$$

Deze formule zegt dat het verschil tussen $\sin\alpha$ en α ten hoogste $\frac{1}{2}\alpha^3$ is. Met de bewering $\sin 0{,}1 \approx 0{,}1$ zitten we er dus op z'n hoogst $0{,}0005$ naast!

Controle
Via de formule $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ kunnen we de benadering van $\cos\alpha$ controleren:

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\alpha\right)^3\right)^2.$$

De rechterkant is gelijk aan

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{8}\alpha^4 - \tfrac{1}{128}\alpha^6.$$

Conclusie:

$$1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 < \cos\alpha < 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{8}\alpha^4.$$

Deze formule zegt dat het verschil tussen $\cos\alpha$ en $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ ten hoogste $\frac{1}{8}\alpha^4$ is.
Als we de precieze waarden voor d en R in de benadering $x \approx \frac{d^2}{8R}$ zouden invullen, dan zou de fout niet meer zijn dan $R \cdot \frac{1}{8}\alpha^4 = 1{,}36$ centimeter. Inderdaad, met $d = 146{,}911$ en $R = 6378{,}388$ is de theoretische diepte $x = R(1 - \cos\alpha) = 422{,}964$ meter. De benadering is $x \approx d^2/8R = 422{,}968$ meter. Een verschil kleiner dan 1cm! Dit verschil valt in het niet tegen alle mogelijke afrondfouten die bij het meten van de afstand Amsterdam – Groningen en het bepalen van de straal van de aarde gemaakt worden. De benaderingsformule kan dus zonder problemen toegepast worden.