150 Jaar Overaftelbaarheid van $\mathbb{R}$

Tá scéilín agam

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

NWD, 15 april 2023: 09:15–10:00

De vraag

 Georg Cantor

Richard Dedekind 

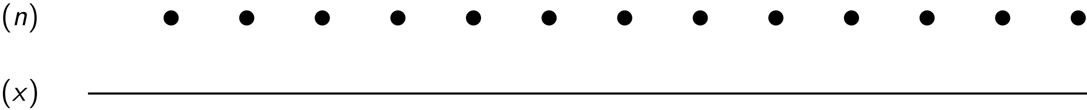
Halle, d. 29ten Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

Dat klinkt toch mooier dan: "Is er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $(0, \infty)$?"
(Peano's definitie van functie is pas uit 1911.)

Opmerkingen van Cantor

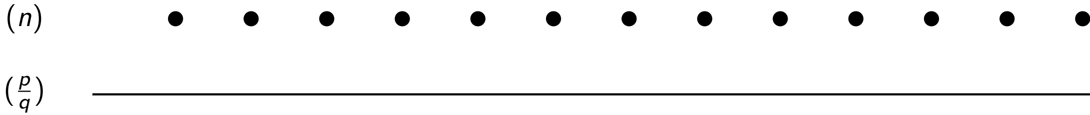
Op het eerste gezicht zou men zeggen dat het niet kan want (n) bestaat uit discrete delen en (x) is een continuum.



Maar dat zegt verder niets, en hoezeer ik ook denk dat het niet kan, ik kan de werkelijke reden niet vinden, en daar is het mij om te doen; misschien is die reden wel heel eenvoudig.

Opmerkingen van Cantor

Zou men op het eerste gezicht ook niet geneigt zijn te denken dat de (n) en het geheel $(\frac{p}{q})$ der positieve rationale getallen zich niet één-op-één aan elkaar laten koppelen?



Maar het is echter niet moeilijk aan te tonen dat dat laatste wel kan en zelfs dat (n) één-op-één gekoppeld kan worden aan $(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu})$, waar n_1, n_2, ..., n_ν onbeperkte positieve gehele indices zijn van een willekeurige hoeveelheid ν.

Kennelijk $(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu})$ in plaats van $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$

Volgende brief: Halle d. 2$^{\text{ten}}$ December 73.

Kennelijk had Dedekind geschreven dat hij het ook niet wist.
Cantor toonde zich gerustgesteld: het lag niet aan hem maar aan de vraag.

Verder: ik heb me er nooit ernstig mee beziggehouden omdat het voor mij geen praktisch nut heeft, en ik ben het met U eens dat het probleem ook weer niet zoveel moeite verdient.

Maar toch: het zou wel mooi zijn als het opgelost zou worden, want het als het antwoord **nee** zou zijn dan hebben we een nieuw bewijs van de Stelling van Liouville dat er transcendente getallen zijn.

Hier was meer aan de hand ...

Volgende brief: Halle d. 2$^{\text{ten}}$ December 73.

... namelijk

Het door U gegeven bewijs dat (n) zich eenduidig aan het lichaam der algebraïsche getallen laat koppelen is ongeveer hetzelfde als het mijne voor $(a_{n_1, n_2, \ldots, n_\nu})$: schrijf $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_\nu^2 = \mathfrak{N}$ en orden de elementen daarnaar.

Volgende brief: Halle d. 2ten December 73.

Voor de positieve rationale getallen: voor elke n hebben we eindig veel positieve breuken $\frac{p}{q}$ met $p^2 + q^2 = n$. Sorteer de breuken dus eerst naar de groep waar ze in zitten, en per groep naar de teller.

Dus:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{2}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{5}, \underbrace{\frac{2}{2}}_{8}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{3}{1}}_{10}, \underbrace{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}}_{13}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{4}{1}}_{17}, \ldots$$

Via $p + q = n$ ziet het er wat mooier uit:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{2}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{3}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}}_{4}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}_{5}, \ldots$$

Volgende brief: Halle d. 2ten December 73.

Is het niet mooi dat men, zoals U heeft laten zien, van het *n*-de algebraïsche getal kunnen spreken?
Een (reëel of complex) getal ω is *algebraïsch* als het een nulpunt is van een polynoom met *gehele* coëfficiënten. (We komen daar straks nog op terug.)

Zoals U terecht opmerkt kan het probleem hergeformuleerd worden tot: kan (n) eenduidig worden gekoppeld aan het geheel $(a_{n_1,n_2,\ldots})$ waar de n_1, n_2, ... onbegrensde positieve gehele getallen zijn en oneindig in aantal.

Wij zouden nu over de verzameling van rijen natuurlijke getallen spreken.

Het antwoord

Halle d. 7^{ten} December 73.

In den letzten Tagen habe ich die Zeit gehabt, etwas nachhaltiger meine Ihnen gegenüber ausgesprochene Vermuthung zu verfolgen; erste heute glaube ich mit der Sache fertig geworden zu sein; sollte ich mich jedoch täuschen, so finde ich gewiss keinen nachsichtigeren Beurtheiler, als Sie. Ich nehme mir also die Freiheit, Ihrem Urtheile zu unterbreiten, was soeben in der Unvollkommenheit des ersten Conceptes zu Papier gebracht is.

Dan volgt een bewijs.

En dan

So glaube ich schliesslich zum Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefe mit (x) bezeichnete Inbegriff **nicht** dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen lässt.

RECLAME!!!!

Ook te lezen in Pythagoras.

Zie het nummer van April 2018

Het bewijs uit de brief

Stel we kunnen alle positieve getallen $\omega < 1$ op een rij zetten:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots \tag{$*$}$$

Na ω_1 nemen we de eerste term ω_α groter dan ω_1, en vervolgens de eerste term ω_β groter dan ω_α, enzovoort.
Schrijf $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$, enzovoort; zo halen we uit $(*)$ een oneindige rij:

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^n, \ldots$$

De eerst term uit de overblijvende rij noemen we ω_2^1, de eerste term die groter is ω_2^2, enzovoort; we extraheren een tweede deelrij:

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \ldots, \omega_2^n, \ldots$$

. . . .

Het bewijs uit de brief

We gaan zo door en verdelen onze rij $(*)$ in oneindig veel deelrijen:

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^n, \ldots \tag{1}$$
$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \ldots, \omega_2^n, \ldots \tag{2}$$
$$\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \ldots, \omega_3^n, \ldots \tag{3}$$

waarbij dus altijd geldt: $\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}$

Het bewijs uit de brief

Neem een interval $(p \cdots q)$ waar geen term van de rij (1) in ligt, zeg binnen $(\omega_1^1 \ldots \omega_1^2)$.

Nu kunnen de termen van de tweede, of de derde ook buiten $(p \cdots q)$ liggen, maar er moet een (eerste) rij zijn, zeg de k-de, waarvan niet alle termen buiten $(p \cdots q)$ liggen (anders ligt er geen term van de hele rij in dat interval en dat kan niet).

Dan kan men een interval $(p' \cdots q')$ binnen $(p \cdots q)$ nemen waar geen term van de k-de rij binnen ligt, en dus ook geen termen van de eerdere deelrijen.

Dan is er weer een (eerste) rij, zeg de k'-de, waarvan niet alle termen buiten $(p' \cdots q')$ liggen.

Dan kan men een derde interval $(p'' \cdots q'')$ binnen $(p' \cdots q')$ nemen waar geen term van de k'-de rij binnen ligt, en dus ook geen termen van de eerdere deelrijen.

Het bewijs uit de brief

En zo gaan we verder, we krijgen een dalende rij intervallen

$$(p \cdots q), (p' \cdots q'), (p'' \cdots q''), \ldots$$

en wel zo dat de termen van deelrijen 1 tot en met $k - 1$ buiten $(p \cdots q)$ liggen,
en de termen van deelrijen k tot en met $k' - 1$ buiten $(p' \cdots q')$ liggen,
en de termen van deelrijen k' tot en met $k'' - 1$ buiten $(p'' \cdots q'')$ liggen, enzovoort

Dan is er een getal, zeg η, dat in al die intervallen ligt, en waarvan men dan snel inziet dat het tussen 0 en 1 ligt en in geen enkele van de deelrijen voorkomt, en dus niet in de oorspronkelijke rij $(*)$.

Dus was onze aanname aan het begin onjuist.

Twee dagen later

Halle d. 9^{ten} December 73.

Ik heb een eenvoudiger bewijs gevonden, zonder splitsen in deelrijen.

Ik laat direct zien dat als ik uitga van een rij

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots \tag{$*$}$$

ik in elk voorgegeven interval $(\alpha \mathinner{\ldotp\ldotp} \beta)$ een getal η kan bepalen dat niet in de rij $(*)$ voorkomt.

Daaruit volgt zonder meer dat (n) en (x) niet één op één gekoppeld kunnen worden, en ik concludeer dat er tussen deze verzamelingen verschillen bestaan die ik tot nu toe niet doorgronden kon.

Berlin d. 25ten December 73.

Cantor schrijft:

hoewel ik het resultaat, hetwelk ik recentelijk met U besproken heb niet wilde publiceren, ben ik daartoe toch aangespoord.
Ik had de heer Weierstrass het resultaat op de de 22ste verteld en hem op de 23ste het bewijs laten zien.
Hij vond dat ik het moest publiceren.
Ik heb een kort artikel geschreven met de titel

Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reelen algebraischen Zahlen

De algebraïsche getallen

Eerst het bewijs (van Dedekind) dat er ‘slechts’ aftelbaar veel (reële) algebraïsche getallen zijn.
Elk algebraïsch getal, ω, is oplossing van een veeltermvergelijking

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

met elke a_i geheel, a_0 positief en zó dat de grootste gemene deler van de a_i gelijk is aan 1, èn zó dat de vergelijking irreducibel is.

In dat geval is de vergelijking geheel door ω bepaald (en dus ook door de andere oplossingen).

Het getal

$$N = (n-1) + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

heet de *hoogte* van ω (en ook van de vergelijking).

De algebraïsche getallen

Elk natuurlijk getal N is hoogte van eindig veel vergelijkingen en dus van eindig veel algebraïsche getallen, stop die in de verzameling A_N.

Elke A_N wordt geordend door de gewone orde van $\mathbb{R}$.

Tel de A_N achtereenvolgens af: eerst A_1, dan A_2, dan A_3 enzovoort (telkens van links naar rechts)

Dit levert een aftelling van de verzameling (ω) van alle reële algebraïsche getallen.

NB Het aantal polynomen van hoogte N is geteld, zie rij A005409 in de OEIS

De stelling

De stelling

Wenn eine nach irgend einem Gesetze gegebene unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrössen:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4.}$$

vorliegt, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4.) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

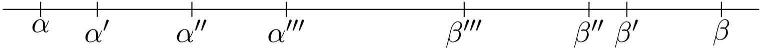
Het gepubliceerde bewijs

Nu het ‘eenvoudigere’ bewijs van het niet bestaan van een één-op-één koppeling van (n) en (x).
Gegeven een rij

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

van positieve reële getallen en een interval $(\alpha \ldots \beta)$.

Het gepubliceerde bewijs



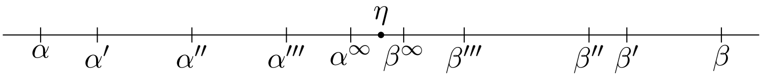
- Laat α' en β' de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in $(\alpha \ldots \beta)$ liggen en wel zó dat $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.
- Laat α'' en β'' de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in $(\alpha' \ldots \beta')$ liggen en wel zó dat $\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta'$.
- Laat α''' en β''' de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in $(\alpha'' \ldots \beta'')$ liggen en wel zó dat $\alpha'' < \alpha''' < \beta''' < \beta''$.
- enzovoort

Het gepubliceerde bewijs

Twee gevallen:

1. Het aantal intervallen is eindig; dan vinden we een interval $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ met ten hoogste één term van de rij er in. Dan zijn we duidelijk klaar.

Het gepubliceerde bewijs



2. Het aantal intervallen is oneindig; dan vinden we een stijgende rij

$$\alpha < \alpha' < \alpha'' < \cdots$$

die naar boven begrensd is (door β) en dus convergeert, met limiet α^∞; en een dalende rij

$$\beta > \beta' > \beta'' > \cdots$$

die naar beneden begrensd is (door α) en dus convergeert, met limiet β^∞.
Neem η in het interval $(\alpha^\infty \ldots \beta^\infty)$ (NB $\alpha^\infty = \beta^\infty$ is heel wel mogelijk).

En ga zelf na waarom η niet in de rij voorkomt.

Recensie

JFM 06.0057.01

Trotzdem in der Nähe jeder beliebig gegebenen reellen Zahl unendlich viele reelle algebraische Zahlen liegen, kann man dennoch den Inbegriff aller reellen algebraischen Zahlen dem aller positiven ganzen Zahlen zuordnen, so dass jede der einen Reihe nur einer der andern entspricht. Da sich nun weiter zeigen lässt, dass wenn eine beliebige Reihe reeller Zahlengrössen vorliegt, man in jedem Intervalle Zahlen bestimmen kann, die nicht zur Reihe gehören, so folgt ein Beweis des zuerst von Liouville gegebenen Satzes, dass in jedem reellen Intervalle unendlich viele transcendente Zahlen vorhanden sind. Reviewer: Netto, Dr. (Berlin)

Een nieuwe vraag

Halle d. 5$^{\text{ten}}$ Januar 74.

Lässt sich eine Flache (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?

Mir will es im Augenblick noch scheinen, dass die Beantwortung dieser Fragen, — obgleich man auch hier zum Nein sich so gedrängt sieht, dass man de Beweis dazu fast für überflüssig halte möchte, — grosse Schwierigkeiten hat.

Een nieuwe vraag

Halle 18. Mai Januar 74.

. . . in Berlin wurde mir von meinem Freunde, dem ich dieselbe Scwierigkeit vorlegte, die Sache gewissermassen als absurd erklärt, da es sich von selbstverstünde, dass zwei unabhänginge Veränderliche sich nicht auf eine zurückführen lassen.

Een antwoord

Halle d. 20^{ten} Juni 1877.

Een vrij lange brief met een bewijs, door ineenvlechten van decimale ontwikkelingen, dat elk eindig aantal onafhankelijke variabelen "mit Spielraum $\geqq 0$ und $\leqq 1$" zich tot één variabele met dezelfde grenzen laat reduceren.

Antwoord van Dedekind

Dat gaat mis wegens het bestaan van verschillende ontwikkelingen.

Karte : Poststempel 23.6.77.

U hebt gelijk, maar het bezwaar geldt alleen het bewijs, gelukkig niet de stelling. Over een paar dagen komt er een uitgebreidere brief.

Een antwoord

Halle 25$^{\text{ten}}$ Juni 1877.

Een lange brief (ruim vijf bladzijden in het boekje): een sluitend bewijs met behulp van kettingbreuken.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
{[0,1]} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{P} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{kettingbreuken}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{vlechten}\uparrow\text{ of splitsen}\downarrow"] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{P}^n \arrow[r, leftrightarrow] & (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n
\end{tikzcd}$$

Gevolgen voor dimensie

Cantor: dit heeft gevolgen voor de meetkunde; iedereen zegt dat je n onafhankelijke coördinaten nodig hebt om n-dimensionale verzamelingen te beschrijven en vind dat vanzelfsprekend. Ik zie daar een denkfout.

Dedekind: uw bijecties zijn niet continu en ik denk dat men het in de (differentiaal)meetkunde over continue afbeeldingen moet hebben.

Cantor: zeker, maar ik bedoelde dat velen het vanzelfsprekend vinden dat men onder alle omstandigheden n onafhankelijke coördinaten nodig heeft.
Ik ben het er mee eens dat het waarschijnlijk is dat de beperking tot continue afbeeldingen wel n onafhankelijke coördinaten nodig maakt. Maar ik zie nog niet hoe dat te bewijzen, en het lijkt mij heel moeilijk.

Gevolgen voor dimensie

Brouwer (ruim dertig jaar later): jullie hadden gelijk, continue bijecties laten de dimensie invariant.

Waar zijn de decimalen?

Waarom geen gebruik van decimalen in het bewijs van de overaftelbaarheid?

Dedekind en Cantor hadden beide (in 1872) constructies van de verzameling der reële getallen gegeven.

Dedekind had daarbij het "Wesen der Stetigkeit" geformuleerd:

Das Wesen der Stetigkeit

Als een lijn R geschreven wordt als vereniging van twee verzamelingen A en B, en wel zó dat $a < b$ als $a \in A$ en $b \in B$. Dat is er een r in R die deze verdeling teweeg brengt: $A = (-\infty, r]$ en $B = (r, \infty)$ (of andersom).

De beide bewijzen uit 1873 hebben niet meer nodig dan dat.

Waar zijn de decimalen?

Niet in het (verzamelde) werk van Cantor.

Vroegste vindplaats (voor mij): *Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten* van Schoenflies (1900); daar wel toegeschreven aan Cantor.

Onder verwijzing naar een artikel waar het niet in staat . . .

Dit bewijs steunt op de stelling dat elk reëel getal een decimale ontwikkeling heeft.
In *Principles of Mathematical Analysis* laat Rudin zien hoe je die ontwikkeling vindt en besluit met

> *Since we shall never use decimals, we do not enter in a detailed discussion.*

Verder lezen

Website: `fa.ewi.tudelft.nl/~hart`

Georg Cantor,
Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, Crelles Journal für Mathematik **77** (1874) 258–262.

K. P. Hart,
On this day in 1873. Weblog (29-11-2017).

K. P. Hart,
On this day in 1873, II. Weblog (07-12-2017).

K. P. Hart,
Cantors Diagonaalargument, Nieuw Archief voor Wiskunde, **16** (1) (2015), 40–43