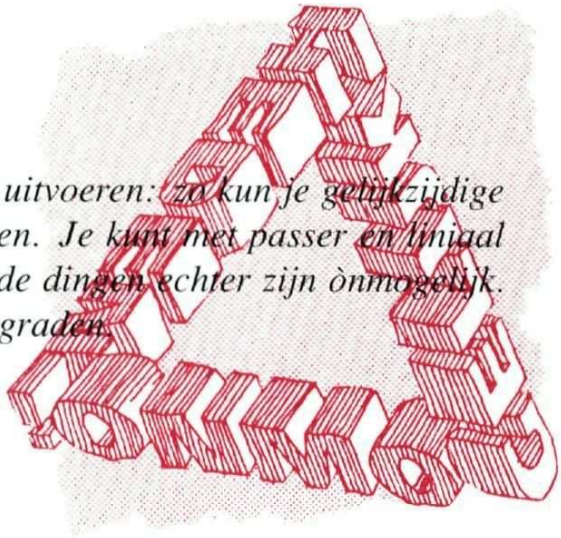
Met passer en liniaal kun je meetkundige constructies uitvoeren: zo kun je gelijkzijdige driehoeken, vierkanten en regelmatige zeshoeken maken. Je kunt met passer en liniaal ook een hoek in twee gelijke hoeken verdelen. Bepaalde dingen echter zijn onmogelijk. Bijvoorbeeld: het in drieën delen van een hoek van 60 graden.



• Passer en liniaal

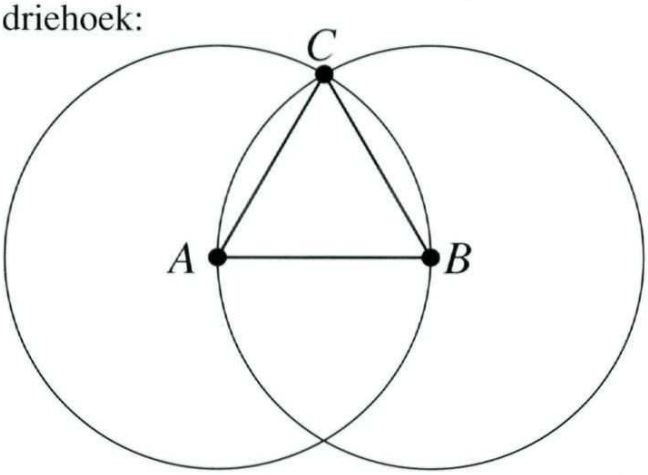
Klaas Pieter Hart

De Griekse meetkunde werd bedreven volgens strikte spelregels. Deze regels zeggen hoe uit gegeven punten nieuwe punten geconstrueerd kunnen worden. De nieuwe punten zijn snijpunten van lijnen en cirkels, waarbij alleen de lijnen en cirkels toegestaan zijn die we kunnen maken met behulp van de volgende twee regels:

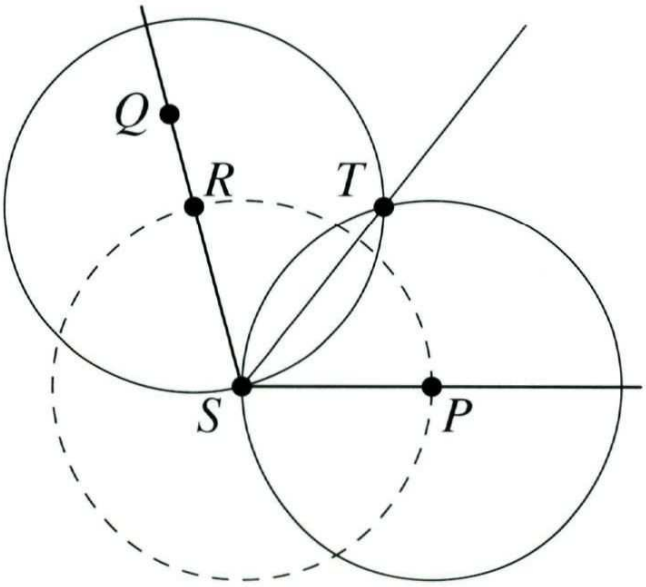
1. door elk tweetal gegeven punten mag een lijn getrokken worden,
2. om elk gegeven punt mag een cirkel getrokken worden met de afstand tussen twee gegeven punten als straal.

We mogen dus alleen passer en liniaal gebruiken; de liniaal om een lijn door twee bekende punten te tekenen, de passer om een cirkel te trekken met een bekend punt als middelpunt en de afstand tussen twee bekende punten als straal. Met deze regels kunnen wij meetkundige constructies uitvoeren. Om iets zinvols te maken, hebben we natuurlijk ten minste twee startpunten nodig, want met één punt komen we niet ver.

Een voorbeeld: de constructie van een gelijkzijdige driehoek. Dit betekent dat we uit twee punten A en B een punt C moeten construeren zodat ΔABC gelijkzijdig is. Dit is eenvoudig: teken twee cirkels met de punten A en B als middelpunten en het lijnstuk AB als straal. Als C een snijpunt is van deze cirkels, dan is ΔABC een gelijkzijdige driehoek:

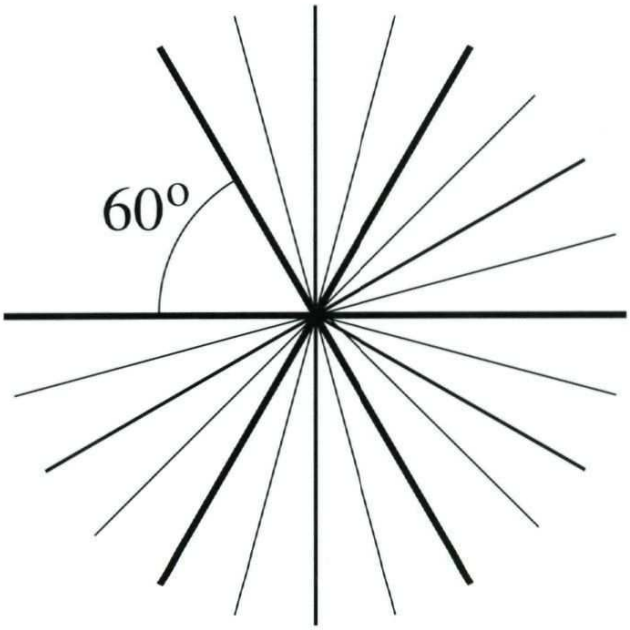


Een ander voorbeeld: de constructie van een lijn die een gegeven hoek in twee gelijke hoeken deelt. De hoek $\angle PSQ$ wordt gegeven door drie punten P, S en Q. De constructie gaat als volgt:



Trek eerst een cirkel met middelpunt S en straal SP. Deze cirkel snijdt de lijn door S en Q in R. Teken vervolgens twee cirkels met middelpunten P en R en straal SP. Deze cirkels snijden in S en in een ander punt T. Dan deelt de lijn ST de gegeven hoek in twee gelijke hoeken.

De voorafgaande twee constructies kunnen we combineren. De hoeken van een gelijkzijdige driehoek zijn $60°$. Door deze hoek in tweeën te delen krijgen we twee hoeken van $30°$. De verkregen hoeken kunnen we weer in tweeën delen. Zo krijgen we hoeken van $15°$, $7\frac{1}{2}°$, enzovoort. Op deze manier zijn heel veel hoeken construeerbaar:



Figuur 1

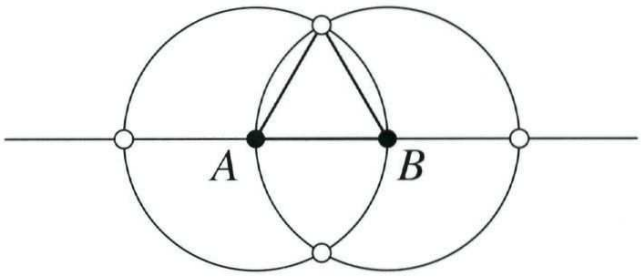
VRAGEN. Kun je de volgende constructieproblemen oplossen?

1. Gegeven is een lijn PQ en een punt S niet op PQ. Construeer de loodlijn van S op PQ, dat wil zeggen, construeer op de lijn PQ een punt T zodat PQ en ST elkaar loodrecht snijden).

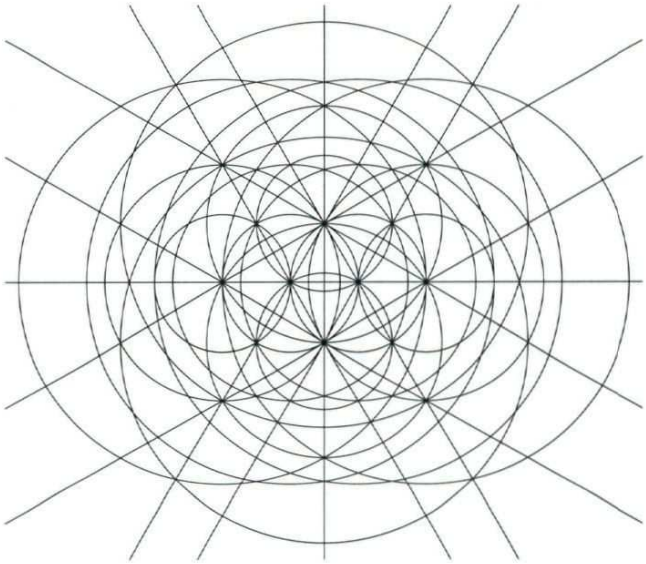
2. Gegeven zijn drie punten P, Q en R die niet op één lijn liggen. Kun je het middelpunt van de cirkel door deze drie punten construeren?

Construeerbare punten

We kunnen constructies afzonderlijk bekijken, maar we kunnen ook systematisch nagaan welke punten we krijgen als we beginnen met twee punten A en B. In eerste instantie kunnen we de lijn door A en B trekken en de cirkels om A en B met straal AB:

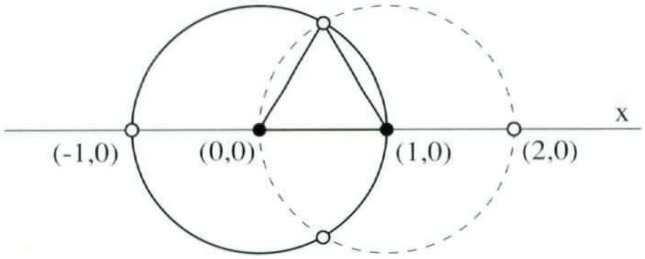


Hiermee hebben we vier nieuwe punten geconstrueerd: de onderlinge snijpunten van de cirkels en de nieuwe snijpunten van de cirkels met de lijn. We herhalen dit procédé met de nieuwe verzameling punten. Door de zes punten kunnen we tien verschillende lijnen trekken. Verder kunnen we vierentwintig cirkels tekenen: om elk van de zes punten vier cirkels met als stralen de lijnstukken AB, $2AB$, $3AB$ en $\sqrt{3}AB$:



Zo hebben we een heleboel nieuwe punten geconstrueerd. We kunnen ons nu afvragen: wat gebeurt er als we deze stappen blijven herhalen? Kunnen we bijvoorbeeld, uitgaande van twee punten A en B, in een eindig aantal stappen èlk willekeurig punt construeren? Het antwoord op deze vraag is niet zo eenvoudig. Passer en liniaal helpen niet veel. Als je de bovenstaande stappen daadwerkelijk uitvoert, dan loopt je papier helemaal dicht met lijnen. Maar het is onduidelijk of je alle punten geconstrueerd hebt.

We doen het daarom anders. We gooien onze passer en liniaal weg en voeren *coördinaten* in. We vatten het punt A op als oorsprong. De lijn door A en B wordt de x-as, op zo'n manier dat B samenvalt met het punt $(1,0)$. Dus $A = (0,0)$ en $B = (1,0)$. De cirkel met middelpunt A en straal AB is nu de eenheidscirkel geworden.



Trekken we ook de cirkel met middelpunt $(1,0)$ en straal 1, dan krijgen we naast $(0,0)$ en $(1,0)$ vier nieuwe punten. De coördinaten daarvan kunnen we uitrekenen. De punten op de x-as zijn gemakkelijk, dat zijn $(-1,0)$ en $(2,0)$. Het berekenen van de snijpunten van de cirkels is iets lastiger. De cirkels hebben vergelijkingen:

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Trekken we de vergelijkingen van elkaar af, dan houden we $2x - 1 = 0$ over. Dit is de vergelijking van de lijn door de snijpunten van de cirkels. Dus $x = 1/2$. Vullen we dit in de vergelijking voor de eerste cirkel in, dan vinden we $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De cirkels snijden dus in de punten $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

De lijnen en cirkels die we met deze zes punten kunnen construeren, leveren een heleboel snijpunten op. Hoe zien de coördinaten daarvan uit? Gaan we lijnen met elkaar snijden, dan krijgen coördinaten met daarin gewone breuken en $\sqrt{3}$'s. Snijden we een lijn met een cirkel of twee cirkels, dan moeten we, zoals we gezien hebben, een wortel trekken. Bijvoorbeeld: een snijpunt van de cirkel door $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ met straal 2 en de cirkel door $(2,0)$ met straal 3 is het punt:

$$\left(\tfrac{1}{6}\sqrt{33}, \tfrac{2}{3}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{11}\right).$$

In de coördinaten verschijnen dus breuken en meer wortels. In de volgende stap krijgen we wortels van wortels. Dit gaat zo door. Bij elke constructiestap krijgen we één wortelteken meer. Een voorbeeld: de snijpunten van de hoeken uit figuur 1 met de eenheidscirkel zijn construeerbare punten. De x-coördinaten van die snijpunten zijn gelijk aan $\cos 30°$, $\cos 15°$, $\cos 7\frac{1}{2}°$, enzovoort. De cosinusformule voor de verdubbeling van een hoek is gelijk aan $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Hieruit volgt dat $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha}$. Toegepast op $\alpha = 30°$ geeft dit:

$$\cos 30^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}},$$

$$\cos 7\tfrac{1}{2}^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\sqrt{3}}}.$$

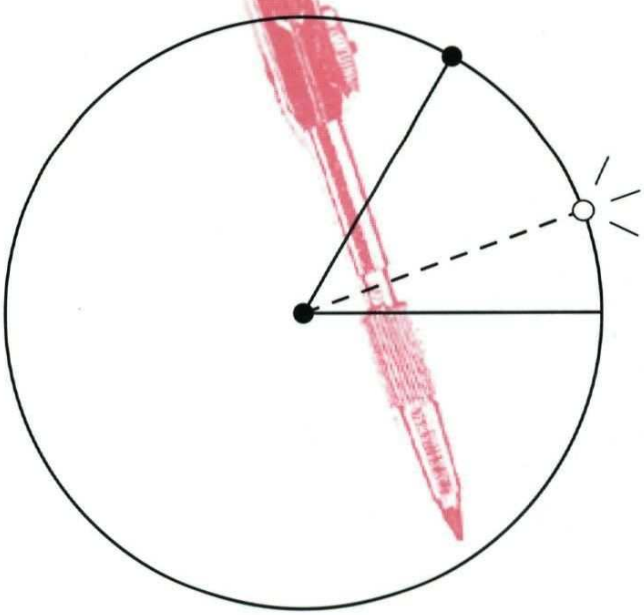
Dus: wortels, wortels van wortels, enzovoort. Dit is in het algemeen waar: coördinaten van met passer en liniaal construeerbare punten zijn opgebouwd uit breuken, uit wortels, wortels van wortels, enzovoort.

Niet-construeerbare punten

Niet èlk punt in het (x,y)-vlak is construeerbaar met passer en liniaal. Waarom? Omdat je met alleen maar breuken en (vierkants)wortels lang niet alle getallen krijgt. Wij geven één voorbeeld: de cosinus van 20 graden. De somregel voor de cosinus luidt $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Met deze regel kun je een formule voor $\cos 3\alpha$ vinden:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Nemen we $\alpha = 20^\circ$, dan is $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$. Dus: $\frac{1}{2} = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$. Wanneer we dit vermenigvuldigen met 2 en $\cos 20^\circ$ vervangen door x, dan vinden we $8x^3 - 6x - 1 = 0$. De cosinus van 20 graden is dus een oplossing van deze vergelijking. Je begrijpt misschien wel dat je deze vergelijking niet kan oplossen met alleen vierkantwortels. Om $x^3 = 2$ op te lossen heb je derdemachtswortels nodig: $x = \sqrt[3]{2}$. Voor $8x^3 - 6x - 1 = 0$ geldt hetzelfde, hiervoor bestaat ook een soort *abc*-formule (de formule van Cardano) en daarin verschijnen derdemachtswortels. Dit suggereert dat een punt met $\cos 20^\circ$ als x- of y-coördinaat niet construeerbaar is, en dit is inderdaad het geval. Voor een compleet bewijs hebben we echter geen ruimte. Het heeft trouwens tot in de negentiende eeuw geduurd, voordat een echt bewijs gegeven werd!

De driedeling van een hoek

Een hoek van 60 graden kunnen we construeren. De lijn door $(0,0)$ die een hoek van 20° met de x-as maakt, snijdt de eenheidscirkel in het punt $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$. We hebben geprobeerd uit te leggen waarom je met passer en liniaal dit punt *niet* kan construeren. Maar dit betekent dat de hoek van 60° niet met passer en liniaal in drie gelijke hoeken verdeeld kan worden. Immers, zou je de hoek van 60° met passer en liniaal in drieën kunnen delen, dan zou je met passer en liniaal het punt $(\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ geconstrueerd hebben!