NIVEAU ○○○

ARCHIMEDES: DE ZANDREKENAAR II — ZANDKORRELS IN HET HEELAL

Kun jij zeggen hoeveel zandkorrels er in het heelal passen? Archimedes kon dat. In de vorige Pythagoras heb je kunnen lezen dat hij dat soort grote getallen kon uitdrukken, in dit artikel kun je lezen hoe hij het aantal zandkorrels ook kon schatten.

door **Klaas Pieter Hart**

In het vorige artikel hebben we het systeem gezien dat Archimedes gebruikte om grote natuurlijke getallen weer te geven. Nu gaan we dat systeem gebruiken om een overschatting te geven van het aantal zandkorrels dat in het heelal past.

HET HEELAL

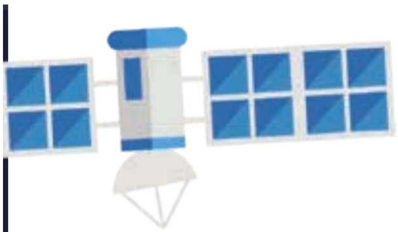
Hoe groot is het heelal? Wat is het heelal? Archimedes ging uit van de ideeën van Aristarchus van Samos. Deze beschreef het heelal als volgt: het is een grote holle bol met de zon in het midden en de sterren op de rand. De aarde draait om de zon, in een cirkel met de zon als middelpunt. Uit de werken van Aristarchus haalde Archimedes de aanname dat de volgende twee verhoudingen gelijk zijn:

$$\frac{\text{diameter aarde}}{\text{diameter baan aarde om zon}}$$

en

$$\frac{\text{diameter baan aarde om zon}}{\text{diameter heelal}}$$

Als je nu weet hoe groot die gemeenschappelijke verhouding is en als je één van de drie grootheden kent, dan weet je ook de rest.



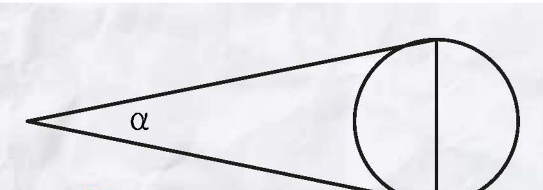
Archimedes begon met de aarde; uitgaande van berekeningen uit die tijd nam hij aan dat de omtrek van de aarde ongeveer 3.000.000 stadia was en niet groter.

Een *stadie* was een Griekse lengte-eenheid waarvan vele versies bestonden; zoals de naam doet vermoeden was hij gebaseerd op de lengte van een sportstadion, maar daar was geen vaste waarde voor afgesproken. Op de Wikipediapagina voor 'stadie' staan bijvoorbeeld al vijf versies vermeld, variërend van 157 tot 209 meter. Voor de berekeningen is dit eigenlijk niet belangrijk; een paar schattingen zouden misschien iets anders uitkomen maar dat doet niet af aan het algemene verhaal van Archimedes: hoe je afschattingen maakt en hoe je met grote getallen rekent.

OPGAVE 1

Gegeven onze kennis over de omtrek van de aarde: hoe groot moet een stadie zeker zijn om de omtrek van de aarde niet groter dan 3.000.000 stadia te laten zijn?

Vervolgens kwamen er aannamen over de grootte van de zon, de maan, en de aarde. De diameter van de aarde is groter dan die van de maan, en de diameter van de zon is groter dan die van de aarde. De diameter van de zon is ongeveer 30 maal die van de maan en niet groter.
Door middel van metingen had Archimedes bepaald dat de diameter van de zon hier op aarde een hoek α bepaalt die ligt tussen 1/200 en 1/164 van een rechte hoek (zie figuur 1).



Figuur 1

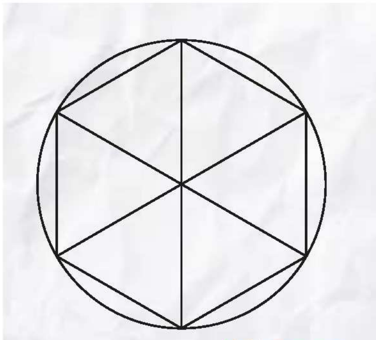
Uitgaande van deze afschattingen kon Archimedes afleiden dat de diameter van de zon groter is dan de zijde van een *chiliagon* ingeschreven in de cirkel die de aarde beschrijft om de zon. Een chiliagon is een (regelmatige) duizendhoek. Die afleiding is niet moeilijk maar kost wat tijd en we bewaren hem tot een latere gelegenheid. Nu wordt het tijd een paar letters in te voeren om de berekeningen wat duidelijker te maken. We noteren:

- d_e: diameter van de aarde
- d_h: diameter van het heelal
- d_m: diameter van de maan
- d_u: diameter van de baan van de aarde om de zon
- d_z: diameter van de zon

De aanname van Aristarchus kunnen we dus schrijven als

$$\frac{d_u}{d_e} = \frac{d_h}{d_u}$$

We gaan nu wat ongelijkheden afleiden.
Ten eerste: $d_u < 10.000d_e$.
Dit volgt omdat $d_z \not> 30d_m$ en $d_m < d_e$, en dus $d_z < 30d_e$.
Verder weten we dat de omtrek van de ingeschreven duizendhoek kleiner is dan $1000d_z$, en dus kleiner dan $30.000d_e$. Die omtrek is groter dan de omtrek van een ingeschreven zeshoek (zie figuur 2).


Figuur 2

Maar de omtrek van zo'n zeshoek is gelijk aan drie maal de diameter, in ons geval is de omtrek van de duizendhoek dus groter dan $3d_u$. Conclusie: $3d_u < 30.000d_e$ en dus, inderdaad

$$d_u < 10.000d_e$$

De omtrek van de aarde is groter dan $3d_e$; dat volgt ook door naar de ingeschreven zeshoek te kijken. De aanname was dat de omtrek van de aarde niet groter is dan >>

3.000.000 stadia. Dus concluderen we dat d_e < 1.000.000 stadia en dus

$$d_u < 10.000.000.000 \text{ stadia}$$

Dat zijn dus honderd eenheden van de tweede orde. De aanname van Aristarchus geeft ons verder ook

$$d_h < 10.000 d_u$$

en dus

$$d_h < 100.000.000.000.000 \text{ stadia}$$

Het aantal stadia in de diameter van het heelal is minder dan de eenheid van de derde orde, en dus zelf een getal van ten hoogste de tweede orde.

HET ZAND

In de brief schreef Archimedes het volgende over de grootte van zandkorrels: in een papaverzaadje gaan niet meer dan 10.000 korrels zand. En de diameter van een papaverzaadje is niet kleiner dan 1/40 van een vingerbreedte.
Nu volgt een lange rij ongelijkheden, waarbij we van een papaverzaadje opklimmen naar de diameter van het heelal. Hierbij zul je π niet tegenkomen en wel omdat Archimedes alleen nodig had dat volumes van bollen zich verhouden als de derde machten van hun diameters.

VINGERBREEDTE

Omdat een papaverzaadje niet kleiner is dan 1/40 van een vingerbreedte weten we dat het volume van een papaverzaadje niet kleiner is dan het volume van een bol met diameter een vingerbreedte *gedeeld door* 40^3.

Dan kunnen we ook concluderen dat $Z_v \ngtr 64.000 Z_p$, waarbij Z_v het aantal zandkorrels is in een bol met diameter een vingerbreedte, en Z_p het aantal zandkorrels in een papaverzaadje. Maar $Z_p \ngtr 10.000$. Dus

$$Z_v \ngtr 640.000.000$$

Dat is een getal van de tweede orde: het bestaat uit 6 eenheden van de *tweede orde* en 40.000.000 eenheden van de *eerste orde*.

Voor het gemak overschatten we dat met 10 eenheden van de tweede orde; we schrijven dus, in ons decimale systeem

$$Z_v < 1.000.000.000.$$

Nu gaan we in stappen verder omhoog.

BOL OM DE AARDE DOOR DE ZON

Stap 1: een bol met diameter honderd vingerbreedten. Daar zit ongeveer $1.000.000 Z_v$ korrels zand in, dat is (veel) minder dan 1.000.000 maal 10 eenheden van de tweede orde, ofwel 10.000.000 eenheden van de tweede orde.

In ons systeem wordt dat 10^{15}.

Stap 2: 10.000 vingerbreedten. De diameter is weer met 100 vermenigvuldigd. Dus de laatste overschatting vermenigvuldigen we met 1.000.000. Er komt dus, in onze taal 10^{21}. Maar $21 = 2 \cdot 8 + 5$, dus Archimedes heeft nu 100.000 eenheden van de *derde orde*.

Stap 3: een stadie. Die eenheid is kleiner dan 10.000 vingerbreedten, dus de schatting blijft gelijk.

Stap 4: 100 stadiën. Weer: de vorige schatting maal 1.000.000, dat geeft ons 10^{27}. En $27 = 3 \cdot 8 + 3$, dat zijn dus 1000 eenheden van de *vierde orde*.

Stap 5: 10.000 stadia. Weer: de vorige schatting maal 1.000.000, dat geeft ons 10^{33}. En $33 = 4 \cdot 8 + 1$, dat zijn dus 10 eenheden van de *vijfde orde*.

Stap 6: 1.000.000 stadia. Weer: de vorige schatting maal 1.000.000, dat geeft ons 10^{39}. En $39 = 4 \cdot 8 + 7$, dat zijn dus 10.000.000 eenheden van de vijfde orde.

Stap 7: 100.000.000 stadia. Weer: de vorige schatting maal 1.000.000, dat geeft ons 10^{45}. En $45 = 5 \cdot 8 + 5$, dat zijn dus 100.000 eenheden van de *zesde orde*.

Stap 8: 10.000.000.000 stadia. Weer: de vorige schatting maal 1.000.000, dat geeft ons 10^{51}. En $51 = 6 \cdot 8 + 3$, dat zijn dus 1000 eenheden van de *zevende orde*.

We hebben al gezien dat de diameter van de baan van de aarde om de zon kleiner is dan 10.000.000.000 stadia. We weten dus dat er minder dan duizend eenheden van de zevende orde aan zandkorrels passen in de bol met de aarde als middelpunt en waar de zon op de rand ligt.

Je kunt aan deze berekening ook zien dat werken met machten van 10 veel sneller gaat dan werken met eenheden en ordes. Wij hadden de diameter van de baan van de aarde als 10^{10} geschreven en het getal van stap 3 in één keer met 10^{30} vermenigvuldigd.

HET HEELAL

Nu gebruiken we dat

$$\frac{d_u}{d_e} = \frac{d_h}{d_u} < 10.000$$

Dus de diameter van het heelal is kleiner dan 10.000 keer de diameter van de bol om de aarde waar de zon op ligt. Dat betekent voor het aantal zandkorrels, Z_h, in het heelal dat het kleiner is dan 10.000^3 maal het aantal in de laatste bol.

In onze schrijfwijze zien we dus bijna meteen dat

$$Z_h < 10^{12} \times 10^{51} = 10^{63}$$

Omdat $63 = 7 \cdot 8 + 7$ zijn dit voor Archimedes duizend myriaden eenheden van de *achtste orde*.

OPMERKINGEN EN OPGAVEN

Ik heb met opzet de eenheden van Archimedes niet naar de onze vertaald omdat dat voor de berekeningen niet belangrijk is.
Je kunt indirect wel iets over die eenheden zeggen. Je kunt een vingerbreedte meten, maar het hangt wel af van de persoon wiens vinger je meet wat de uitkomst is. Hier en daar wordt voor een vingerbreedte de *duim* genomen; dat is hetzelfde als de *inch* en die is officieel gelijkgesteld aan 2,54 cm.

In het begin van dit artikel is ook al gezegd dat niet helemaal duidelijk is welke oude stadie we eigenlijk hadden moeten nemen.

OPGAVE 2
Als we een vingerbreedte gelijk stellen aan een duim, wat betekent dat dan voor een stadie?

OPGAVE 3
Klopt het antwoord met de onderschatting van de stadie uit opgave 1? Dat wil zeggen: kan de omtrek van de aarde niet groter zijn dan 3.000.000 stadia èn kan tegelijkertijd een stadie niet langer zijn dan 10.000 duimen?

Als je op wikipedia naar papaverzaadjes en zandkorrels zoekt (in het Engels '*poppy seeds*' en '*sand*') dan zul je zien dat er nogal wat variatie in de grootte van zandkorrels is en dat sommige zandsoorten korrels hebben die groter zijn dan papaverzaadjes. Dat maakt de overschatting van 10.000 korrels in een papaverzaadje wel erg grof.

OPGAVE 4
Probeer zelf eens met nauwkeurigere gegevens wat nauwkeurigere bovenschattingen te maken.

Ten slotte: het heelal is natuurlijk vele malen groter dan Aristarchus dacht en ook de verhoudingen tussen de diameters van de zon, de aarde, de maan en de baan van de aarde om de zon zijn totaal anders.

OPGAVE 5
Probeer eens te (over)schatten hoeveel zandkorrels er in de aarde passen, of in de zon, of in de bol met diameter die van de baan van aarde om de zon.

DE JUISTE GEGEVENS ZIJN WEL OP INTERNET TE VINDEN.

<<