Mark Veraar
Delft Institute of Applied Mathematics
TU Delft
m.c.veraar@tudelft.nl

Oratie

Mathematics:

In de wiskundige analyse kan men een onderscheid maken tussen 'harde' en 'zachte' technieken. Zachte technieken zijn van meer structurele aard en verschaffen vaak dieper inzicht in een probleem. Vervolgens worden deze gecombineerd met harde technieken, zoals ingewikkelde afschattingen, om tot nieuwe resultaten te komen. In zijn intreerede op vrijdag 13 september 2019 legt Mark Veraar aan de hand van eenvoudige voorbeelden uit de analyse het verschil uit tussen harde en zachte analyse. Hij laat zien hoe bruggen tussen verschillende deelgebieden binnen de wiskunde kunnen helpen om harde argumenten te vervangen door zachte. Ook het omgekeerde komt voor: soms worden nieuwe resultaten aanvankelijk bewezen met zachte technieken en worden vervolgens met behulp van harde argumenten nog scherpere resultaten verkregen.

Mijn rede gaat over harde en zachte wiskunde. Ik zal op verschillende manieren toelichten wat ik hiermee bedoel. Onder andere geef ik voorbeelden uit de wiskunde, maar ik zal ook connecties met andere wetenschappen aangeven. Vervolgens zal ik in meer detail bespreken wat harde en zachte wiskunde betekent binnen mijn vakgebied partiële differentiaalvergelijkingen en harmonische analyse.

Ik wil graag beginnen met de subkop van een *Volkskrant*-artikel van 3 september 2019:

> "De beoefenaren van de 'zachte' wetenschappen voelen zich door het kabinet achtergesteld bij de 'harde' bèta-disciplines. Vooral financieel en dat moet afgelopen zijn."

Opvallend hier zijn de woorden *zacht* en *hard*. Hier kom ik later op terug. Ik begrijp volkomen dat er met ongenoegen wordt gereageerd op de beslissingen die de laatste tijd in de politiek worden genomen over de verdeling van geld. Zodra je besluit om met geld te gaan schuiven van het ene vakgebied naar een ander vakgebied, dan zet je groepen mensen tegenover elkaar die normaal gesproken met elkaar overleggen en samen besluiten maken. Dit is erg onhandig management en dient te worden voorkomen waar mogelijk. Transparantie en overleg over financiën zijn van groot belang binnen grote organisaties.

Een groot deel van het probleem in Nederland is dat er te weinig geld naar wetenschappelijk onderzoek gaat. Niet alleen de overheid maar ook het bedrijfsleven investeert te weinig. Er is dan ook een cultuuromslag nodig binnen Nederland. Uit een onderzoek van het Rathenau Instituut blijkt dat Nederland in 2017 ongeveer 2 procent van het BBP uitgeeft aan onderzoek en innovatie, zie Figuur 1. Het Europese advies is 3 procent. Een doel van het kabinet is om in 2020 op 2,5 procent uit te komen, maar dat lijkt voorlopig nog niet haalbaar. De landen Canada, Verenigd Koninkrijk, Australië en Ierland komen lager uit dan Nederland, maar zij hebben een systeem dat onvergelijkbaar is met dat van Nederland; zij vragen namelijk enorm veel collegegeld aan studenten. Het enige land uit de tabel met vergelijkbaar systeem dat lager uitkomt is Italië. Ik denk dat de meeste wetenschappers het er mee eens zijn dat het al jaren bergafwaarts gaat met de onderzoekssituatie in Italië. Veel Italianen vertrekken naar andere landen om daar hun onderzoek voort te zetten.

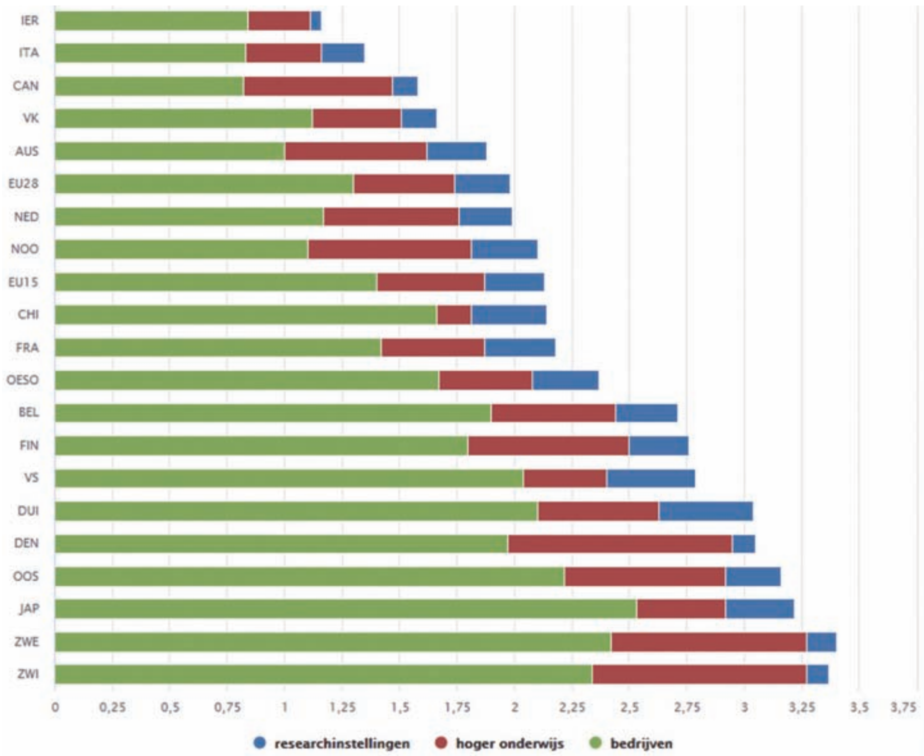
Indien de overheid het geld op een nieuwe manier wil gaan verdelen, dan is de enige juiste manier om dit te doen door gezamenlijk met de gewone en technische universiteiten tot een overeenkomst te komen. De TU Delft is in een situatie waarin de studentenaantallen snel groeien. De overheid moedigt dit aan omdat er veel

Roy Borghouts

Mark Veraar

hard or soft

behoefte is aan afgestudeerde ingenieurs; eigenlijk zouden er nog veel meer studenten een bèta-opleiding moeten doen. Tegelijkertijd zitten onderwijszalen overvol, de stad Delft loopt vol, de huurprijzen stijgen en docenten draaien onbetaalde overuren vanwege het extra werk dat ontstaat bij een hoger aantal studenten.



Illustratie: Rathenau instituut

Figuur 1 R&D-uitgaven naar uitvoerende sector, als percentage van bbp, 2017.

De tsunami van studenten

Bij het instituut waar ik werk, het Delft Institute of Applied Mathematics (DIAM), wordt dit effect nog eens extra versterkt. Onze afdeling verzorgt namelijk al het wiskundeonderwijs binnen de universiteit. Dit doen we met veel plezier en inzet en ook erg succesvol met veel ‘docent van het jaar’-schappen. Het is erg belangrijk voor een universiteit om het wiskundeonderwijs door een wiskundeafdeling te laten verrichten waar een breed palet aan kennis op het gebied van onderwijs en onderzoek aanwezig is. Wiskunde is de taal van de wetenschap. Het is een aparte discipline die je weliswaar kunt integreren in je eigen discipline, maar een ‘taal’ zoals wiskunde leer je veel beter van een ‘native speaker’. Veel bachelorstudies in Delft bestaan voor 10 à 25 procent uit wiskundevakken. Aangezien er zo’n 25 000 TU Delft-studenten zijn, hebben wij een flinke verantwoordelijkheid.

Tegelijkertijd hebben we bij wiskunde ook onze eigen studenten. In het academisch jaar 2008/2009 waren er ongeveer 30 eerstejaars bachelorstudenten. In de jaren hierna groeide dit tot ongeveer 60, 100, 160 en vervolgens 200. De laatste jaren schommelt het aantal rond de 200 studenten. We zijn dus in de loop der jaren maar liefst zeven maal groter geworden.

Een veelgestelde vraag is waar de landelijke groei bij wiskunde vandaan komt. Het minimum aantal wiskundestudenten was ongeveer 100 en nu zijn er meer dan 1000 universitaire eerstejaars wiskundestudenten. In de landen om ons heen is deze fluctuatie niet geweest. De 1000 eerstejaars zijn procentueel vergelijkbaar met bijvoorbeeld Duitsland. In de jaren zeventig en tachtig waren er vergelijkbare aantallen wiskundestudenten in Nederland. Indien we bij wiskunde ook internationaal studenten gaan werven zullen we zeker verdubbelen (zoals gebeurd is bij informatica aan de TU Delft). Er is vorig jaar voor gekozen om dat (nog) niet te doen.

De onderzoekstijd bij DIAM staat onder druk. Sommige collega's houden veel te weinig tijd over voor onderzoek. Waar sommigen een onderzoekstaak van 50 procent hebben, blijft daar soms maar 25 procent van over door de onderwijstaken. We hopen dat de sectorplangelden en andere middelen ons zullen helpen om wat druk weg te nemen.

Redenen voor de groei van het aantal wiskundestudenten kunnen zijn:

- met wiskunde krijg je snel een goede baan
- met wiskunde kun je heel veel kanten uit
- bij wiskunde D krijgen leerlingen een beter beeld wat wiskunde is
- de voorlichting is geprofessionaliseerd
- wiskunde in Nederland presenteert zichzelf goed
- wiskunde is meer in het nieuws
- wiskunde is steeds relevanter voor de maatschappij

Vroeger had wiskunde een nogal stoffig imago. Aan de TU Delft is dit zeker niet het geval. Het onderwijs en het onderzoek bij DIAM zijn breed en een uitstekende mix tussen theorie en toepassing. Wiskunde is overal: het is nodig bij logistiek, voorspellingen, internet, verzekeringen, banken, onze apparaten, data, machine learning, et cetera. Er wordt weleens gedacht over meer 'soft skills' in onze opleiding. Dat is een verzamelnaam voor skills zoals ownership, strategisch denken, oplossingsgerichtheid, communicatieve vaardigheden, teamwork, et cetera. Soft skills zijn belangrijk, maar ik was toch blij verrast toen tijdens de laatste onderwijsvisitatie een commissielid uit het bedrijfsleven er op hamerde dat we beter geen opzichzelfstaande 'soft skill'-vakken kunnen aanbieden in ons master programma, want dat is zonde van de tijd. Je kunt beter focussen op de 'hard skills' en de 'soft skills' verwerken in bestaande wiskundevakken. Dingen die eventueel niet aan bod komen kun je ook prima in het bedrijfsleven leren. Of dit ook van toepassing is op andere opleidingen aan de TU Delft kan ik niet beoordelen.

Godfrey Hardy in 1927

Harde en zachte wetenschap en wiskunde

De woorden 'hard' en 'zacht' zijn nu op twee plekken aan bod gekomen: de harde en zachte studies en de harde en zachte skills. De socioloog Norman William Storer (1930) maakt in een artikel uit 1967 onderscheid tussen de harde wetenschappen en zachte wetenschappen. Storer zegt onder andere:

> "The degree of rigor seems directly related to the extent to which *mathematics* is used in a science, and it is this that makes a science hard."

Onder de zachte wetenschappen horen volgens Storer bijvoorbeeld antropologie, politicologie, psychologie en sociologie. Onder harde wetenschappen worden onder meer verstaan: natuurkunde, scheikunde en biochemie. In onze tijd kunnen we dit lijstje aanvullen met informatica, electrical engineering en nog veel meer vakgebieden, waaronder een groot deel van de opleidingen aan de TU Delft. De onderverdeling tussen hard en zacht is niet noodzakelijk zwart-wit; een wetenschap zoals economie zit tussen hard en zacht in. Gek genoeg heeft Storer wiskunde zelf niet bij een van de twee groepen ingedeeld, maar ik vermoed dat hij het evident vond dat wiskunde bij de harde wetenschappen hoort.

Ik wil het met u vandaag eigenlijk niet hebben over harde en zachte wetenschap, maar over harde en zachte wiskunde. Met 'hard' en 'zacht' worden niet 'moeilijk' en 'makkelijk' bedoeld. In sommige gevallen is het zelfs eerder het tegenovergestelde. Om dit verder toe te lichten wil ik een stuk van de beroemde wiskundige Hardy[1] uit 1929 [24] citeren:

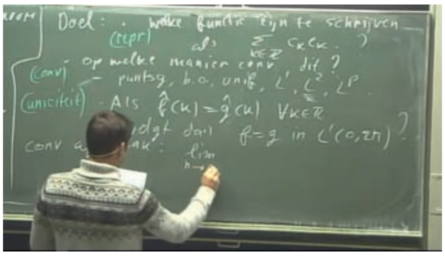
> "A thorough mastery of elementary inequalities is today one of the first necessary qualifications for research in the theory of functions; at any rate, in function theory of the 'hard, sharp, narrow' kind as opposed to the 'soft, large, vague' kind (I do not use any of these adjectives as words either of praise or blame), the function-theory of Bohr, Landau, or Littlewood, as opposed to the function-theory of Birkhoff or Koebe."

Hardy heeft het hier over ongelijkheden in de theorie van functies. Dit valt onder het gebied van de wiskunde dat analyse heet. Ongelijkheden en afschattingen spelen een belangrijke rol in dat vakgebied en in mijn eigen onderzoek. Ik noteer enkele voorbeelden van bekende ongelijkheden op het krijtbord:

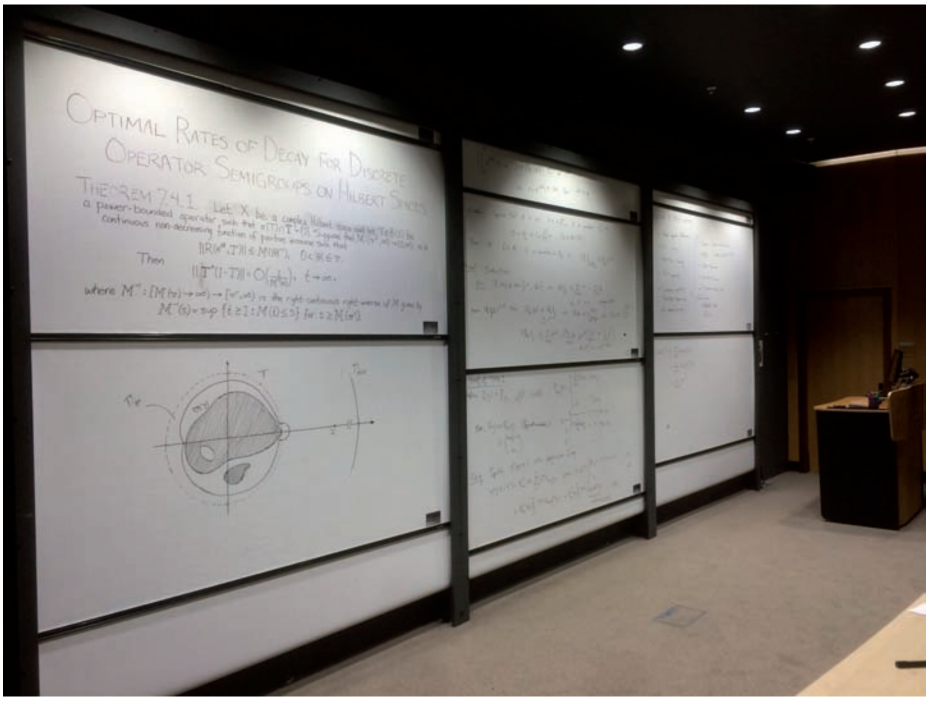
- $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ (een rationale approximatie van het getal π van Archimedes),
- $xy \leq \frac{x^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon y^2}{2}$ (de Peter-Paul ongelijkheid[2]),
- $\sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} \leq n!$ (de ongelijkheid van de Moivre–Stirling[3]),
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (de ongelijkheid van Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz[4]).

Een ode aan de krijtborden

Krijtborden zijn waarschijnlijk voor het eerst gebruikt op universiteiten in de negentiende eeuw en zijn volgens de historicus Andrew Warwick een van de belang-



College reële analyse door Mark Veraar



Goede whiteboards in het Andrew Wiles-gebouw in Oxford

rijke redenen dat natuurwetenschappelijke denkwijzen en methoden zich zo snel kon verspreiden [42]. Veel beoefenaars van exacte wetenschappen gebruiken graag een krijtje (zie [1] en [2]). Dit klinkt ouderwets, maar niets is minder waar. Op bijna alle bèta-universiteiten en onderzoeksinstituten van hoog niveau wordt geïnvesteerd in de beste krijtborden. Deze worden consequent gebruikt voor voordrachten, discussies en colleges door wetenschappers van naam en faam. Belangrijke wiskundige conferentiecentra zoals Oberwolfach, Banff, Luminy, Bedlewo en het Isaac Newton Institute hebben fantastische krijtborden. Het Isaac Newton Institute gaat zelfs zo ver dat ze krijtborden hebben in de liften en toiletten.

Waarom geven veel van ons de voorkeur aan een krijtbord, vraagt u zichzelf misschien af. Ten eerste zijn er geen elektronische hulpmiddelen nodig behalve eventueel licht. Verder is het erg belangrijk dat een bètacollege of voordracht een natuurlijke snelheid heeft. Formules en ingewikkelde logische beweringen worden langzaam opgebouwd. Dit gaat nogal eens mis bij beamervoordrachten, waar sprekers soms zestig technische slides in een half uurtje doorlopen. Een whiteboard is ook een optie. Echter na het inademen van de lucht van sommige stiften ben ik na twee uur college in elk geval helemaal duizelig. Het is ook onduidelijk of een stift bijna leeg is. Verdere nadelen zijn de hogere kosten van stiften en het slechte zicht bij spiegeling van licht op het whiteboard. Vaak is er ook te weinig ruimte op een whiteboard. Een uitzondering is het moderne Andrew Wiles[5]-gebouw in Oxford uit 2013. Daar lopen de whiteboards over de gehele hoogte en breedte van de muren en is het mogelijk om het whiteboard-papier omhoog en omlaag te draaien op een rol. Hierdoor is er zelfs zoveel schrijfruimte dat het niet nodig is om het bord leeg te vegen tijdens een twee uur durend college.

Ik heb ook een flink aantal uren colleges gegeven met zogenaamde smartboards. Het is even wennen, maar ook goed te doen. Er zijn wel nadelen. De kosten zijn hoog en je bent afhankelijk van de elektronica. Als alles dan goed werkt zijn er nog steeds problemen. Bij grote groepen is het smartboard vaak te klein en hierdoor kunnen de studenten achterin de zaal het smartboard niet goed zien. Dit wordt dan vaak opgelost door het smartboard te projecteren op een groot scherm. Helaas creëert dit weer een nieuw probleem, de toehoorders kijken naar het scherm in plaats van naar de spreker en hierdoor ben je een deel van je communicatie kwijt. Een tweede probleem van smartboards is dat het wat tijd kost om er aan te wennen en dus ook niet zo handig voor discussies in kleinere groepen (ook is er vaak maar één elektronische pen).

Op een krijtbord kan iedereen zijn ideeën eenvoudig toevoegen en schetsen. Daar komen vaak mooie dingen uit. Vroeger werd weleens gezegd dat zo'n groot voordeel van een smartboard is dat je alles in een bestand kunt bewaren en aan de studenten kunt geven. Tegenwoordig is dat probleem ook verholpen: colleges worden vaak opgenomen en zo niet dan maken toehoorders van een bord vol met interessante dingen gewoon een foto met hun smartphone. Foto's van krijtborden van wiskundigen zijn de basis van een toekomstig boek van kunstenares Jessica Wynne [45] dat binnenkort zal verschijnen.

Voorbeelden van harde en zachte analyse

Om uit te leggen wat harde en zachte analyse is wil ik verschillende voorbeelden geven. Aangezien u allen zeer verschillende voorkennis heeft, beginnen we eenvoudig. Een bekend verhaal is dat de wiskundige Carl Friedrich Gauss (1777–1855) op de basisschool door zijn leraar gevraagd werd om de getallen $1, 2, 3, \ldots, 100$ bij elkaar op te tellen. Dit was om de leergierige Gauss even bezig te houden. De jonge Gauss gaf echter binnen een paar seconden het antwoord: 5050. Hoe deed Gauss dit zo snel? Hij herschreef de som als volgt:

$$\begin{aligned} &1+2+3+\cdots+98+99+100 \\ &\quad = (1{+}100)+(2{+}99)+(3{+}98)+\cdots+(50{+}51) \\ &\quad = \quad 101 + \quad 101 + \quad 101 + \cdots + 101 \\ &\quad = 50 \cdot 101 \\ &\quad = 5050. \end{aligned}$$

Bovenstaande zachte manier van optellen is veel efficiënter en mooier dan de harde manier waarbij je de getallen stuk voor stuk in de originele volgorde bij elkaar telt.

Een ander voorbeeld dat bijna iedereen weleens gezien heeft is de berekening van oppervlakten onder de grafiek van functies, vaak genoteerd[6] als

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dit zou je kunnen berekenen met behulp van de definitie via Riemann-sommen. Deze harde methode (en slimme varianten hierop) wordt veel gebruikt in de numerieke wiskunde. Soms is het echter efficiënter om de hoofdstelling van de integraalrekening (±1674, Barrow, Gregory, Leibniz, Newton) te gebruiken: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, waarbij F een primitieve van f is: $F' = f$. Ik heb iemand weleens horen zeggen dat de ontdekking van de differentiaalcalculus een belangrijke rol heeft

Terrence Tao, 2006

gespeeld in de industriële revolutie. De n-dimensionale versie van bovenstaande hoofdstelling, de Cartan–Kelvin–Stokes-stelling[7] is een van de belangrijkste stellingen in de differentiaalmeetkunde.

Andere voorbeelden zijn het verschil tussen een kwalitatief resultaat (zacht) en kwantitatief resultaat (hard). Denk hierbij aan het verschil tussen uitspraken zoals $x_n \to 0$ (zacht) en bijvoorbeeld $|x_n| \leq Kn^{-7}$ (hard), of de continuïteit van een functie (zacht) en een afschatting van de modulus van continuïteit (hard), of het bestaan van een optimum (zacht) en een efficiënt algoritme om het optimum te vinden (hard).

Een interessante beschouwing over harde en zachte analyse is te vinden op de blog van Terrence Tao[8] [41]. Tao noemt hier een aantal voorbeelden om de verschillen duidelijk te maken. Het hoofddoel van zijn beschouwing is om het eindige convergentieprincipe (hard) uit te leggen en toe te passen op ergodentheorie en getaltheorie. Het *Oneindige convergentie-principe* (zacht) is iets dat iedere wiskundige kent: Begrensde monotone rijen zijn convergent. Minder bekend is het *eindige convergentie-principe* (hard):

$\forall \varepsilon > 0 \; \forall F: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \; \exists M \in \mathbb{N}$
$\forall$monotone $(x_n)_{n=1}^M \subseteq [0,1]$
$\exists N < M \;\; \forall m,n \in [N, \min\{N+F(N), M\}]$
geldt dat $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

In woorden zegt de stelling dat voor gegeven fout ε en functie F, voor alle eindige rijen die lang genoeg zijn (lengte M) ε-stabiliteit geldt in de staart van de rij (lengte $F(N)$). De lengte M hangt expliciet af van ε en F (en dus niet van $(x_n)_{n=1}^M$). De voorbeelden $F(n) = 1$ of $F(n) = n$ zijn al interessant, maar ook exponentieel groeiende functies F zijn soms van belang.

De bovenstaande harde stelling speelt een rol in het beroemde artikel [20]. Hier hebben Green en Tao de volgende stelling over aritmetische priemprogressies bewezen.

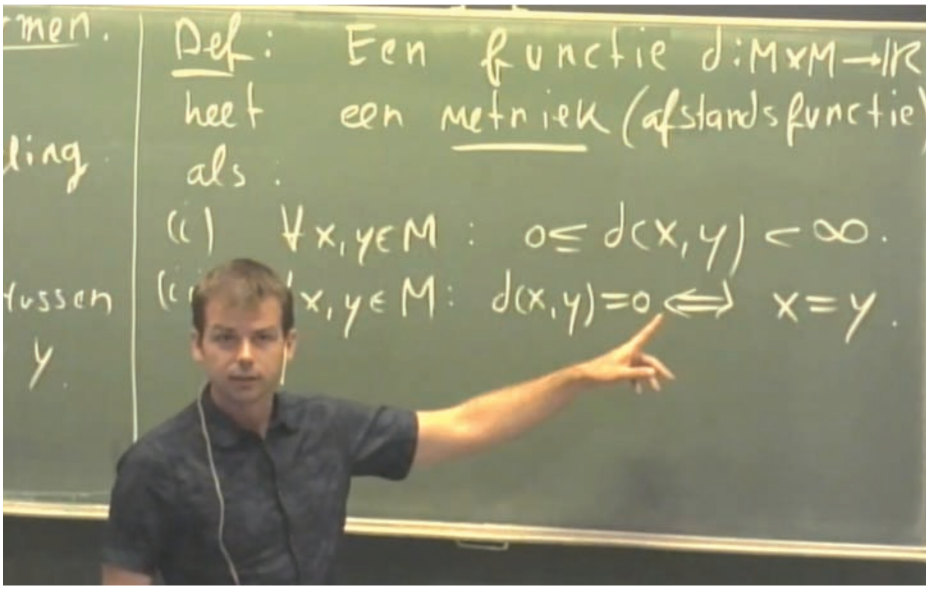
Stelling 1. (Green–Tao, 2008) *Zij $k \in \mathbb{N}$. Er bestaan oneindig veel priemprogressies van lengte k.*

Om uit te leggen wat priemprogressies zijn, geef ik twee voorbeelden. De getallen $7, 37, 67, 97, 127, 157$ zijn maar liefst zes priemgetallen en de afstand tussen twee opvolgende getallen is telkens 30. Je kunt je hierover het volgende afvragen: kunnen we het aantal van zes priemgetallen groter maken indien we de tussenafstand 30 vervangen door een ander getal? Dat blijkt inderdaad het geval. Een voorbeeld van tien priemgetallen met afstand 210 is $199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089$. Stelling 1 zegt dat hoe hoog je het gevraagde aantal priemgetallen ook maakt, je zo'n rijtje priemgetallen altijd kunt vinden. Het bewijs van deze stelling is lang (67 bladzijden) en technisch en maakt gebruik van getaltheorie, harmonische analyse, kansrekening en ergodentheorie.

De rol van de functionaalanalyse

Zoals al gezegd is wiskunde de taal van de wetenschap. Functionaalanalyse wordt de moderne taal van de mathematische fysica genoemd. Dit wordt bijvoorbeeld duidelijk uit de monografiereeks van Reed en Simon startend bij hun boek over functionaalanalyse [37]. De grondleggers van de functionaalanalyse zijn onder anderen Stefan Banach (1892–1945), David Hilbert (1862–1943) en Frigyes Riesz (1880–1956). De motivatie voor de ontwikkeling van de functionaalanalyse waren de spectraaltheorie en de toepassing hiervan op differentiaal- en integraalvergelijkingen.

Binnen het vakgebied functionaalanalyse worden veel zachte argumenten gebruikt. Het is dan ook geen grote verrassing dat Hardy's uitspraak over harde en zachte argumenten gemaakt werd in de tijd dat dit vakgebied belangrijke ontwikkelingen doormaakte. Existentie van vreemde objecten kan soms worden bewezen via de stelling van Baire[9] en dit geeft vaak zachte argumenten. Bijvoorbeeld is het mogelijk om dit te gebruiken om aan te tonen dat er continue functies bestaan die nergens differentieerbaar zijn (zie bijvoorbeeld [44, sectie IV.1]). Sterker, er blijken veel meer continue functies te zijn dan differentieerbare functies. Een harde constructie was al eerder met de hand gedaan door de grondlegger van de moderne analyse Karl Weierstrass (1815–1897) in 1872 en was toendertijd een grote schok voor de wiskundige gemeenschap. De functie van Weierstrass was een zogeheten lacunaire reeks van cosinussen. Het was overigens Hardy zelf die gevallen die Weierstrass open had gelaten nog verder heeft uitgezocht (zie [23]). Inmiddels staan eenvoudige variaties van de



Mark Veraar tijdens zijn oratie

functie van Weierstrass in standaard tekstboeken zoals [6, pp. 157–168] dat ik deels bij mijn tweedejaars college reële analyse gebruik.

Afschattingen bewijzen is vaak een hele kunst. En de hulp van zachte functionaalanalytische argumenten kan handig zijn. Volgens Hardy [24] zei Harald Bohr (1887-1951) ooit:

> "All analysts spend half their time hunting through the literature for inequalities which they want to use and cannot prove."

Dat is inderdaad waar. Gelukkig maken het internet en boeken zoals [25] en [16] het iets eenvoudiger om een ongelijkheid op te zoeken of zelf te bewijzen. De open afbeeldingsstelling [10] en gesloten grafiekstelling (zacht) van Banach–Schauder [8, Sectie III.12] laten ons zien dat afschattingen voor lineaire situaties ook lineaire afhankelijkheden zullen hebben. Alhoewel ik zelf altijd probeer om de afschatting expliciet te bewijzen (hard), is het feit dat de afhankelijkheid lineair moet zijn erg nuttige informatie. Dit maakt bijvoorbeeld het zoeken naar een bewijs makkelijker. Verderop zullen we bekijken wat dit betekent voor partiële differentiaalvergelijkingen.

Met behulp van de uniforme begrensdheidsstelling van Banach–Steinhaus [8, Sectie III.14] is het mogelijk om eenvoudig afschattingen te versterken tot uniforme afschattingen. Een standaard zachte toepassing is aantonen dat er continue periodieke functies $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ bestaan waarvoor de Fourierreeks divergeert in het punt $x=0$ (zie bijvoorbeeld [39, Sectie 5.11]). De enige harde afschatting die hiervoor nodig is, is

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{|k|\le n}e^{ikx}\right|dx=\infty.$$

De harde constructie van een functie met divergente Fourierreeks was al bekend en gedaan door Paul du Bois-Reymond (1831–1889) in 1873.

Er zijn nog veel andere zachte en harde voorbeelden in de analyse te noemen. Vooral als je denkt aan scheidingsstellingen (Hahn–Banach), dekpuntstellingen en begrippen zoals compactheid en metrische entropie. Het is erg bijzonder dat in de wiskunde sommige stellingen en technieken niet verouderen. Ze zijn universeel. Vooral de standaardstellingen in de functionaalanalyse worden nog steeds dagelijks gebruikt door heel veel wetenschappers in theoretische maar ook in meer toegepaste gebieden. Ook kan het gebeuren dat wiskundige stellingen pas na tientallen jaren nuttig blijken. Dit is ondenkbaar in sommige andere wetenschappen, waar iets dat ouder is dan een paar maanden vaak al achterhaald is. Het huidige onderzoek in de functionaalanalyse gaat nog altijd door, al zijn de fundamentele stellingen al lang geleden bewezen en sommige van de open problemen erg lastig. Recent onderzoek is dan ook vaak gebiedsoverschrijdend. Hierbij ontstaan nieuwe interessante vragen. Een van de gebieden is de theorie van partiële differentiaalvergelijkingen (PDVs), waar bijvoorbeeld spectraaltheorie wordt gecombineerd met harde afschattingen uit de harmonische analyse. Verschillende concrete voorbeelden hiervan komen nog aan de orde. Ook in andere gebieden wordt over grenzen heen gekeken: eindige dimensionale genormeerde vectorruimten spelen een belangrijke rol in delen van de informatica (bijvoorbeeld machine learning en (kwantum-) informatietheorie).

Laten we iets dieper ingaan op een voorbeeld van een zachte bewijstechniek gerelateerd aan PDVs. De klassieke Poincaré-ongelijkheid geeft een afschatting van een functie $u:\Omega\to\mathbb{R}$ in termen van zijn gradiënt ∇u indien $u=0$ (Dirichlet) op de rand van Ω. Deze ongelijkheid is eenvoudig te bewijzen met een expliciete afschatting die alleen afhangt van de diameter van Ω en de dimensie. De volgende variatie van deze stelling wordt vaak gebruikt in het geval van Neumann [11]-randcondities.

Stelling 2 (Poincaré–Wirtinger). *Zij $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ een samenhangend C^1-gebied. Dan bestaat er een constante C_Ω zó dat voor alle $u\in C^1(\overline{\Omega})$ met gemiddelde nul geldt:*

$$\int_\Omega|u|\,dx\le C_\Omega\int_\Omega|\nabla u|\,dx.$$

Het standaardbewijs van deze stelling is een niet-constructief bewijs met behulp van compactheidstechnieken en is een typisch geval van een zacht bewijs. Ik geef de details hieronder.

Bewijs. Stel niet. Dan bestaan er functies $u_1,u_2,\dots$ met

$$\int_\Omega|\nabla u_n|\,dx\le\frac{1}{n}\text{ en }\int_\Omega|u_n|\,dx=1,$$

Foto: Arnout Jaspers

Alessio Figalli tijdens de Equadiff-conferentie in Leiden 2019.

en gemiddelde 0 voor alle $n\ge1$. Uit compactheid van de Sobolev-embedding vinden we een deelrij $(u_{n_k})_{k\ge1}$ en een functie $u:\Omega\to\mathbb{R}$ zodat $\int_\Omega|u_{n_k}-u|\,dx\to0$. Het is nu eenvoudig na te gaan dat

1. $\int_\Omega|u(x)|\,dx=1$.
2. gemiddelde$(u)=0$.
3. $\nabla u=0$ (zwakke afgeleide).

Uit (3) volgt dat u constant is. Uit (2) volgt dan dat $u=0$. Dit is in tegenspraak met (1). □

Gek genoeg weten we in het algemeen bijna niets over C_Ω. Indien Ω convex is, dan is het mogelijk om expliciete afschattingen te geven (zie [32, Theorem 10.2.5]). Het bovenstaande type argument wordt overal in de analyse gebruikt. Het is een interessante mix van harde en zachte technieken. Een voorbeeld waar een variatie op dit argument gecombineerd wordt met verschillende andere ingewikkelde harde en zachte technieken is te vinden in de recente preprint van Cabre–Figalli [12]–Ros-Oton–Serra uit 2019 [5]. Zij bewijzen onder andere de volgende verrassende stelling.

Stelling 3 (Cabre–Figalli–Ros-Oton–Serra). *Zij $n\le9$. Zij $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ een begrensd open, convex C^1-gebied. Zij f een lokale Lipschitz-functie zijn met $f\ge0$. Zij $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ een stabiele oplossing van*

$$\begin{cases}-\Delta u=f(u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

Dan bestaat er een constante C die alleen afhangt van Ω (en niet van f en u) zó dat

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}|u|\le C\int_\Omega|u|\,dx.$$

De expressie $\int_\Omega|u|\,dx$ laat zich in veel gevallen eenvoudig afschatten. In zulke

Lars Hörmander in 1969

gevallen geeft de bovenstaande uniforme afschatting, gecombineerd met Calderón–Zygmund-theorie, dat $u \in W^{1,p}(\Omega)$ voor alle $p \in [1,\infty)$ (zie [17] en [32]). Als Ω en f beide C^∞ zijn, dan is dit te combineren met Sobolev embedding resultaten en Schauder-theorie (zie [17] en [31]) om te vinden dat $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ met bijbehorende afschattingen. De conditie dat $n \leq 9$ is noodzakelijk in Stelling 3. Er zijn eenvoudige voorbeelden die laten zien dat het resultaat niet waar is voor $n \geq 10$.

Partiële differentiaalvergelijkingen

In Stelling 3 hebben we een voorbeeld gezien van een partiële differentiaalvergelijking (PDV). Dit zijn vergelijkingen die we gebruiken om oplossingen van problemen in de natuurwetenschappen en economie te beschrijven. Denk hierbij aan: stroming, diffusie, transport, prijzen, et cetera. De PDVs waaraan ik werk zijn vaak van evolutietype: er is een tijdsparameter aanwezig. Zulke vergelijkingen spelen onder andere een rol in de natuurwetenschappen; ze komen voor in de akoestiek, warmteleer, stromingsleer, golven, patronenformatie, elektriciteit, mechanica, populatiemodellen, et cetera. Concrete voorbeelden zijn Navier–Stokes, Euler, Helmholtz, Klein–Gordon, Maxwell, Monge–Ampère, Cahn–Hilliard, Burgers, Schrödinger, Volterra, Fitzhugh–Nagumo, et cetera.

Onderzoek naar partiële differentiaalvergelijkingen (PDVs) is erg breed en overdekt verschillende gebieden zoals modelleren, numerieke simulatie, laboratoriumonderzoek (verificatie van modellen, berekening fysische/economische constanten), tot aan theoretische uitspraken over het gedrag van de oplossing. Meer dan de helft van de onderzoekers aan de TU Delft heeft weleens met PDVs te maken en meer dan de helft van alle TU Delft-studenten leert iets over PDVs.

Binnen de PDVs worden harde en zachte wiskundige technieken gebruikt. Terrence Tao zegt op zijn blog uit 2007:

> "PDE is an interesting intermediate case in which hard and soft analysis are popular and useful, though many practitioners of PDE still prefer to primarily use just one of the two types."

Typische vragen die men zich stelt zijn: is er lokale/globale existentie, uniciteit, wat is de regulariteit van de oplossing? Wat is het asymptotisch gedrag en hoe kunnen we de oplossing benaderen? Juist de combinatie van harde en zachte analyse is hier interessant. Harde en zachte methoden hierbij hebben te maken met energieafschattingen/identiteiten, fixpunten, singuliere integralen, bifurcatie, variatierekening, spectraaltheorie, geometrie, verstoring, linearisatie, minimalisatie, numerieke benadering. Welke hier hard of zacht is hangt van de situatie af.

Laten we iets verder in detail treden in het geval van een lineaire differentiaalvergelijking. Voor het gemak nemen we aan dat de lineaire differentiaaloperator L begrensd is van een Banachruimte X_1 naar X_0 en hierbij ligt X_1 continu ingebed in X_0. In toepassing zou X_1 een ruimte van gladde functies zijn en X_0 een ruimte van 'gewone' functies.[13] Het aantonen van goedgesteldheid van problemen van de vorm

$$Lu = f$$

is wegens de open afbeeldingsstelling equivalent aan het oplossen van $Lu = f$ voor f in een dichte lineaire deelruimte $Y \subseteq X_0$ en de a priori afschatting $\|u\|_{X_1} \leq C\|Lu\|_{X_0}$ voor alle $u \in X_1$, waarbij C onafhankelijk is van u. Het feit dat deze uitspraken equivalent zijn, maakt het zoeken naar een bewijs van de goedgesteldheid eenvoudiger. Verder kan de a priori afschatting ook nog nuttig zijn voor niet-lineaire varianten van bovenstaande probleem via onder andere linearisatietechnieken en de impliciete functiestelling. Het aantonen van de a priori afschatting is vaak een lastig probleem waarvoor meestal harde analyse nodig is. Denk hierbij aan Calderón–Zygmund-, Schauder-theorie en de Giorgi–Moser–Nash-technieken (zie bijvoorbeeld [14, 17, 31, 32, 33]). Aan de andere kant kunnen abstracte stellingen weer zo krachtig zijn dat de verificatie van de voorwaarden enigszins zacht is. Een deel hiervan is uiteengezet in Hörmanders[14] monografie [26], welke hij later heeft uitgebreid naar zijn vier beroemde boeken met een prachtige mix van harde en zachte analyse.

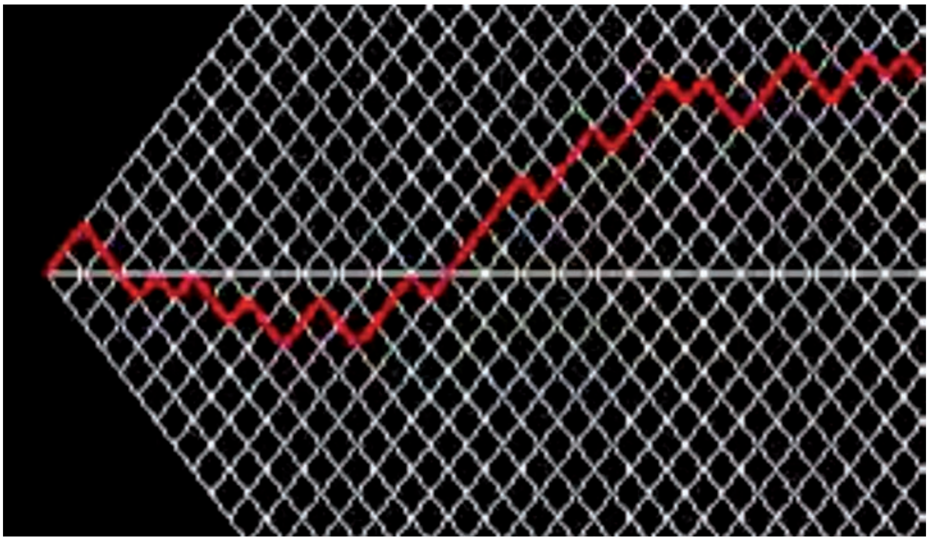
Foto: MFO, Konrad Jacobs

Kiyosi Itô in 1970

De Brownse beweging en ruis

In de moderne analyse spelen verschillende technieken uit de kansrekening een belangrijke rol. Denk hierbij aan constructies en bewijzen waar random keuzes worden gebruikt. Een van de belangrijkste objecten hierbij is de Brownse beweging. De Brownse beweging kan gebruikt worden om oplossingsformules voor sommige veelvoorkomende PDVs te geven. Denk hierbij aan de warmtevergelijking, Laplace/Poisson-vergelijking, Feynman–Kac-formule, Schrödinger-vergelijking, et cetera (zie bijvoorbeeld [12]). De oplossingsformules blijken vooral nuttig wanneer deze worden gecombineerd met Itô-calculus.[15]

De Brownse beweging is ontdekt in laboratoria bij het bestuderen van de beweging van grotere moleculen (zoals pollen) in water. Door de random botsing van het grotere molecuul met de watermoleculen ziet de beweging van het grotere molecuul er enigszins willekeurig uit. De drie coördinaten van het grotere molecuul komen nauw overeen met die drie onafhankelijke



Figuur 2 Approximatie Brownse beweging met random walk [4].

Brownse bewegingen. Op deze manier is dit proces onafhankelijk ontdekt door Jan Ingenhousz in 1786 en Robert Brown in 1827. De eerste bekende wiskundige beschrijving is van Thorvald Thiele (1838–1910) uit 1880 en de eerste precieze wiskundige constructie van Norbert Wiener (1864–1964) uit 1923. De Brownse beweging wordt ook gebruikt in financiële modellen. Dit is voor het eerst gedaan door Louis Bachelier (1870–1946) in 1900. De fysici Albert Einstein in 1905 and Marian Smoluchowski in 1906 gebruikten 'Brownse deeltjes' zoals dat gedaan wordt in de statistische mechanica.

De Brownse beweging is de moeder van alle continue lokale martingalen (zie [29, Chapter 18] and [38, Chapter V]). Het is bijzonder dat van een stochastisch proces dat al zo lang geleden is ontdekt nog steeds belangrijke nieuwe eigenschappen worden gevonden. In mijn onderzoek speelt de Brownse beweging, eindig- en oneindigdimensionaal, een centrale rol als de zogenaamde 'ruis' binnen een model. Denk hierbij aan random fluctuaties die eigenlijk onvoorspelbaar en overal gelijke intensiteit hebben. Dit leidt tot wat vaak een 'witte ruis' genoemd wordt. Dit is een ruis in ruimte en tijd tegelijk. Ruis kan additief of multiplicatief zijn; dit hangt af van het fysische of economische model dat gebruikt wordt.

Differentiaalvergelijkingen met ruistermen zoals hierboven beschreven worden stochastische differentiaalvergelijkingen (SDVs) en stochastische partiële differentiaalvergelijkingen (SPDVs) genoemd. Op dit moment is dit gebied een populair onderzoeksgebied dat verschillende lagen van de wetenschap raakt: modellering, numerieke benadering, regulariteit, et cetera. Voor een introductie tot het onderwerp verwijs ik naar [9] en [21]. Het recente werk Martin Hairer[16] (zie bijvoorbeeld [22]) heeft het gebied van SPDVs een enorme stimulans gegeven. Bijvoorbeeld zijn sommige onbegrepen problemen met witte ruis in hogere dimensies nu toegankelijk geworden door de juiste 'correcties' toe te passen.

Singuliere integralen, harmonische analyse

In de harmonische analyse, nu al een paar keer genoemd, worden onder andere singuliere integralen bestudeerd. Deze zijn vaak nodig bij het bewijzen van regulariteit van oplossingen van PDVs. Een voorbeeld van een singuliere integraal operator is de Hilbert-transformatie:

$$Hf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y)}{y}\,dy, \quad f \in C_c(\mathbb{R}),$$

wiens oorsprong ligt in de complexe functietheorie. Deze transformatie heeft singulariteiten bij $y = 0, \pm\infty$ en de integraal dient geïnterpreteerd te worden als hoofdwaarde-integraal. In 1927 bewees Marcel Riesz[17] dat H een begrensde lineaire operator is op $L^p(\mathbb{R})$ als $p \in (1,\infty)$.[18]

Het werk van Marcel Riesz heeft uiteindelijk geleid tot een heel vakgebied waar singuliere integralen worden bestudeerd (zie bijvoorbeeld [18] en [19]) met als belangrijkste motivatie de toepassing op PDVs. Een van de eenvoudigste toepassingen is de L^p-regulariteit van de oplossing van $\Delta u = f$, waarbij $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. De afbeeldingen $f \mapsto \partial_i \partial_j u$ worden de tweede orde Riesz-transformaties genoemd en zijn continu in L^p voor $p \in (1,\infty)$. Belangrijke stappen in deze theorie werden gemaakt door Littlewood–Paley[19] in hun tweezijdige ongelijkheid voor g-functies en door Marcinkiewicz[20] in zijn L^p-multiplierstelling voor trigonometrische reeksen.

Alberto Calderón (1920–1998) en Antoni Zygmund (1900–1992) hebben het werk van Marcel Riesz uitgebreid naar een grote klasse van singuliere integraaloperatoren. Zij zijn de grondleggers van deze theorie en daarom worden deze operatoren nu vaak Calderón–Zygmund-operatoren genoemd. Zij hebben een grote invloed op de harmonische analyse gehad. Dit blijkt onder andere uit de lijst promovendi die zij begeleid hebben. Hiertoe behoren tal van bekende wiskundigen: onder anderen Michael Christ, Paul Cohen, Eugene Fabes, Carlos Kenig, Józef Marcinkiewicz en Elias Stein. Een grote klasse van Calderón–Zygmund-operatoren wordt verkregen via de Hörmander–Mihlin-multiplierstelling.[21]

In hetzelfde jaar dat Marcel Riesz zijn resultaat over de Hilbert-transformatie bewees, werd de Peter–Weyl[22]-stelling bewezen. Hun stelling speelt een belangrijke rol binnen de representatietheorie en de abstracte harmonische analyse. Sinds 1927 is de Fourier/harmonische analyse eigenlijk twee verschillende richtingen op gegaan: de reële harmonische analyse (hard), met Calderón–Zygmund-theorie, et cetera, zoals hierboven verder toegelicht en de abstrac-

Józef Marcinkiewicz

Jean Bourgain

te harmonische analyse (zacht), met hierin representatietheorie, niet-abelse Fourier-analyse, operatoralgebra's (zie [15]).

Mijn onderzoek aan (S)PDVs gebruikt singuliere integralen voor vector-waardige functies en ook stochastische varianten van zulke integralen. Onder andere het werk van Bourgain[23], Burkholder[24] en McConnell[25] in de jaren tachtig is van grote invloed geweest op dit gebied. Zij hebben laten zien dat een groot deel van de reële harmonische analyse generaliseert naar de Banachwaardige situatie onder geometrische condities op de Banachruimte. Het interessante aan deze theorie is dat drie lastige wiskundige gebieden bij elkaar komen: harmonische analyse, de geometrie van Banachruimten en stochastische analyse.

Voor PDVs van evolutietype bleek deze theorie al snel van groot belang zoals werd aangetoond in het werk van Dore–Venni [11]. Deze theorie heeft vervolgens een metamorfose ondergaan nadat Weis zijn operatorwaardige Fourier-multiplierstelling had bewezen [43] onder R-begrensdheid condities van Mihlin-type. Dit werk maakt het mogelijk om een deel van de parabolische regulariteitstheorie via zachte methoden te verkrijgen. De fundamenten van R-begrensdheid spelen al een rol in verschillende artikelen uit de twintigste eeuw. De terminologie en kracht van dit concept kwamen pas echt tot stand door het artikel [7] van Clément–de Pagter–Sukochev–Witvliet. Het succes van de toepassing op evolutievergelijkingen is vooral te danken aan het werk van Prüss en zijn coauteurs (zie bijvoorbeeld [10] en [36]).

Om een goed beeld te geven van bovenstaande ontwikkelingen is er nog één onderwerp dat geheel mist: de H^∞-functionaalcalculus. De spectraaltheorie voor zelfgeadjungeerde operatoren is zeer krachtig maar ook enigszins beperkt in toepassingen: de onderliggende ruimte moet een Hilbertruimte zijn en de operatoren moeten zelfgeadjungeerd zijn. Het was Alan McIntosh (1942–2016) in 1980 [35] die de H^∞-functionaalcalculus ontwikkelde. Zijn motivatie kwam voort uit de mogelijke toepassing op het 'Kato square root-probleem'[26] dat van groot belang is voor PDVs. Uiteindelijk is Kato's probleem opgelost via H^∞-calculus en een mix van harde en zachte harmonische analyse.

De theorie van de H^∞-calculus won snel aan populariteit en al snel bleek dit ook erg interessant en nuttig in de theorie van PDVs. Onder andere door het baanbrekende artikel van Kalton[27]–Weis [30] uit 2001. Onder andere blijkt uit dit artikel hoe je H^∞-calculus en R-begrensdheid kunt samenbrengen om de begrensdheid van een grote klasse van singuliere integralen te bewijzen. Dit resultaat heeft een belangrijke rol gespeeld in veel artikelen over parabolische PDVs en ook in verschillende van mijn regulariteitsresultaten over SPDVs. Een deel van de abstracte theorie is uiteengezet in mijn gezamenlijke boekenserie [27] en [28] met mijn coauteurs Tuomas Hytonen, Jan van Neerven en Lutz Weis. Er komen twee nieuwe volumes waarin we ons onder andere zullen richten op de toepassing op evolutievergelijkingen.

Jan Prüss in zijn werkkamer

Het gebruik van R-begrensdheid en de H^∞-calculus om nieuwe stellingen te bewijzen is vaak onderdeel van de zachte analyse. Anderzijds is het aantonen dat een differentiaaloperator aan de benodigde R-begrensdheidscondities voldoet, of zelfs een H^∞-calculus heeft, vaak harde harmonische analyse. Gelukkig worden er steeds meer zachte methoden ontdekt om het harde werk enigszins te vereenvoudigen.

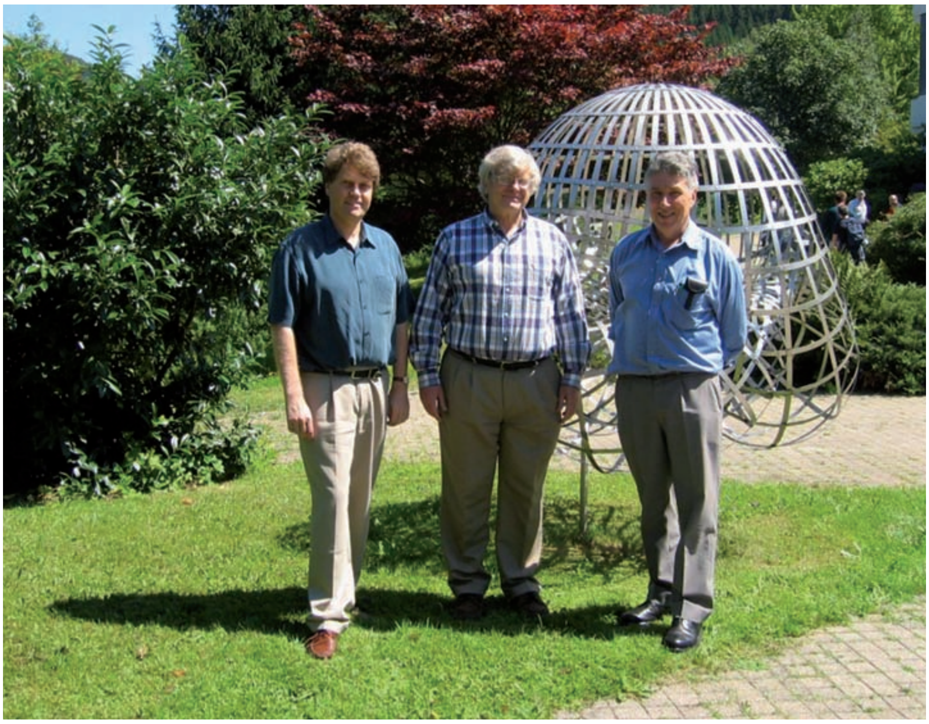


Foto: MFO, Renate Schmid

Oberwolfach 2004: Spectral Theory in Banach Spaces and Harmonic Analysis. Lutz Weis, Nigel Kalton en Alan McIntosh

Ik wil eindigen met een citaat van Freeman Dyson [28] [13]:

"Some mathematicians are birds, others are frogs. Birds fly high in the air and survey broad vistas of mathematics out to the far horizon. They delight in concepts that unify our thinking and bring together diverse problems from different parts of the landscape. Frogs live in the mud below and see only the flowers that grow nearby. They delight in the details of particular objects, and they solve problems one at a time. I happen to be a frog, but many of my best friends are birds. The main theme of my talk tonight is this. Mathematics needs both birds and frogs. Mathematics is rich and beautiful because birds give it broad visions and frogs give it intricate details. Mathematics is both great art and important science, because it combines generality of concepts with depth of structures. It is stupid to claim that birds are better than frogs because they see farther, or that frogs are better than birds because they see deeper. The world of mathematics is both broad and deep, and we need birds and frogs working together to explore it."

Deze kikker heeft gesproken, dus ik heb gezegd.

Noten

1 Godfrey Hardy (1877–1947) was een Britse wiskundige die veel belangrijke resultaten in de analyse en getaltheorie heeft bewezen. Verschillende ongelijkheden en methoden zijn naar hem vernoemd. Denk hierbij aan de Hardy-ongelijkheid, de Hardy–Littlewood-ongelijkheid, de Hardy–Littlewood-maximaal-operator, de Hardy–Littlewood-cirkelmethode. Hardy werkte bijna zijn hele carrière samen met de even bekende John Littlewood 1885–1977.

2 Je steelt van Peter om Paul te betalen.

3 Het resultaat van de Moivre–Stirling zegt zelfs dat voor $n \to \infty$ beide zijden vergelijkbaar zijn.

4 Zie [40] voor een interessant boek op basis van deze ene ongelijkheid.

5 Andrew Wiles (1953) is beroemd om zijn werk binnen de getaltheorie. Vooral is hij bekend vanwege zijn bewijs van de laatste stelling van Fermat en mede hiervoor heeft hij de Abelprijs (analogon van de Nobelprijs voor de wiskunde) gekregen. Kort nadat de plannen voor het Andrew Wiles-gebouw klaar waren, bleek dat Andrew Wiles weer van Princeton naar Oxford zou verhuizen. Een interessant gevolg is dat hij dus nu werkt in het gebouw dat naar hem vernoemd is.

6 Veel wiskundestudenten beseffen niet dat het integraalteken een uitgerekte letter s is. Deze letter komt van het woord som/sum/summe en niet van surface zoals sommige mensen denken.

7 De geschiedenis van deze stelling is wat ingewikkeld. De moderne n-dimensionale versie van de stelling is bewezen door Élie Cartan (1869–1951), in 1945.

8 Terrence Tao (1975) is geboren in Australië, maar heeft Chinese voorouders. Hij is een van de grootste analytici/wiskundigen van deze tijd. Hij heeft veel prijzen gewonnen, waaronder ook de Fieldsmedaille in 2006.

9 In zijn proefschrift bewees René-Louis Baire (1874–1932) in 1899 het volgende: "In een volledige metrische ruimte M is de doorsnede van een rij dichte open verzamelingen weer dicht in M."

10 Als X en Y Banachruimten zijn en $T : X \to Y$ is een surjectieve continue lineaire operator, dan beeldt T open verzamelingen af op open verzamelingen.

11 Carl Neumann (1832–1925) is bekend van de Neumann-reeks $1 + x + x^2 + \cdots$ en de theorie van integraalvergelijkingen. De randconditie is naar hem vernoemd.

12 Alessio Figalli (1984) heeft het resultaat van het artikel in juli 2019 op de Equadiff-conferentie gepresenteerd. Figalli is een van de meest recente Fieldsmedaillewinnaars.

13 Bijvoorbeeld $X_0 = L^p$ en $X_1 = W^{2,p}$, of $X_0 = C_{ub}$ en $X_1 = C^2_{ub}$ in het geval van een tweede orde differentiaal operator L.

14 Lars Hörmander (1931–2012) wordt de belangrijkste bijdrager genoemd van de moderne theorie van lineaire PDVs. Hij won de Fieldsmedaille in 1962.

15 Kiyosi Itô (1915–2008) was een pionier op het gebied van stochastische integratie en stochastische differentiaalvergelijkingen. De Itô-calculus is een variant van de differentiaalcalculus die onder andere geschikt is voor stochastische processen zoals de Brownse beweging.

16 Martin Hairer (1975) is Fieldsmedaillewinnaar uit 2014 voor zijn werk in de stochastische analyse.

17 Marcel Riesz (1886–1969) is de jongere broer van de eerder genoemde Frigyes Riesz. Marcel Riesz was ook een analyticus en heeft veel belangrijke resultaten gevonden; de Riesz–Thorin-interpolatiestelling, resultaten over Dirichlet-reeksen (waaronder een boek met Hardy), begrensdheid van Riesz-potentialen, et cetera.

18 Eigenlijk beschouwde Marcel Riesz het periodieke geval. Zijn resultaat had als gevolg dat Fourier reeksen van L^p-functies in L^p-convergeren naar de functie zolang $p \in (1, \infty)$.

19 Raymond Paley 1907–1933 heeft een aantal belangrijke dingen gedaan in zijn korte carrière. Hij overleed tijdens het skiën door een lawine.

20 Józef Marcinkiewicz (1910–1940) heeft 55 artikelen geschreven tussen 1933 en 1939. Bijvoorbeeld zijn interpolatiestelling, multiplierstelling en veel resultaten samen met Antoni Zygmund, zoals bijvoorbeeld hun sterke wet van de grote aantallen. Het is bizar hoe veel resultaten Marcinkiewicz gevonden heeft en dat veel van zijn resultaten nog steeds veel gebruikt worden. Marcinkiewicz is overleden als oorlogsgevangene in de Tweede Wereldoorlog op dertigjarige leeftijd. Een prachtig overzichtsartikel over de wiskundige en persoon Józef Marcinkiewicz is [34].

21 Solomon Mikhlin (1908–1990) zag hoe hij de uit Marcinkiewicz-multiplierstelling een continue versie kon afleiden. Deze stellingen zijn later weer verder uitgebreid door Hörmander door handig gebruik te maken van Calderón–Zygmund-theorie.

22 Fritz Peter (1899–1949) was promovendus van de beroemde mathematische fysicus Hermann Weyl (1885–1955).

23 Jean Bourgain (1954–2018) was een van de krachtigste analytici aller tijden en won dan ook de Fieldsmedaille voor zijn zeer diverse werk in de analyse. Hij is ooit begonnen aan de Vrije Universiteit Brussel, maar werkte hierna op veel beroemde instituten waarvan de laatste 24 jaar in Princeton.

24 Donald Burkholder (1927–2013) is een zeer bekende naam in de kansrekening en is vooral bekend om zijn werk aan martingaaltheorie.

25 Terry McConnell heeft als eerste een Banach-waardige Mihlin-multiplierstelling bewezen via Itô-calculus.

26 In het 'Kato's square root-probleem' uit 1953 vraagt hij zich af of de volgende normequivalentie geldt: $\|\sqrt{L}f\|_2 \simeq \|\nabla f\|_2$. Hierbij is $L = \mathrm{div}(A\nabla)$, met A een complexe matrix met begrensde meetbare coëfficiënten, zodat L uniform elliptisch is. Na 48 jaar is het probleem opgelost in [3]. Er is nog altijd veel onderzoek aan uitbreidingen van dit resultaat.

27 Nigel Kalton (1946–2010) werkte vooral aan functionaalanalyse, harmonische analyse en speltheorie. Aan het einde van de jaren negentig raakte hij geïnteresseerd in evolutievergelijkingen en heeft hij veel betekend voor dit gebied.

28 Freeman Dyson (1923) is een Amerikaanse theoretisch fysicus en wiskundige bekend door zijn werk aan quantumelektrodynamica, vastestoffysica, astronomie en nuclear engineering.

Referenties

1 De kracht van krijt, 2008, https://www.nrc.nl/nieuws/2008/02/16/dekrachtvankrijt-11488356.

2 The power of the blackboard, 2017, https://physicsworld.com/the-power-of-the-blackboard.

3 P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, A. McIntoh en Ph. Tchamitchian, The solution of the Kato square root problem for second order elliptic operators on $\mathbb{R}^n$, *Ann. of Math. (2)* 156(2) (2002), 633–654.

4 N. Berglund, Simulation of scaling random walk with convergence to Brownian motion, 2012, youtube.com/watch?v=BOmURxCgubM.

5 X. Cabre, A. Figalli, X. Ros-Oton en J. Serra, Stable solutions to semilinear elliptic equations are smooth up to dimension 9, 2019, arXiv:1907.09403.

6 N.L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, 2000.

7 Ph. Clement, B. de Pagter, F.A. Sukochev en H. Witvliet, Schauder decompositions and multiplier theorems, *Studia Math.* 138(2), (2000), 135–163.

8 J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96, Springer, 1990, 2nd ed.

9 G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic equations in infinite dimensions*, volume 152 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, 2nd ed.

10 R. Denk, M. Hieber en J. Prüss, R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type, *Mem. Amer. Math. Soc.* 166(788) (2003).

11 G. Dore en A. Venni, On the closedness of the sum of two closed operators, *Math. Z.* 196(2) (1987), 189–201.

12 R. Durrett, *Brownian Motion and Martingales in Analysis,* Wadsworth Mathematics Series, Wadsworth International Group, 1984.

13 F. Dyson. Birds and frogs, *Notices Amer. Math. Soc.* 56(2) (2009), 212–223.

14 L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19 American Mathematical Society, 1998.

15 G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.

16 D.J.H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.

17 D. Gilbarg en N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer, 2001, reprint of the 1998 edition.

18 L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 249, Springer, 2014, 3rd ed.

19 L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 250, Springer, 2014, 3rd ed.

20 B. Green en T. Tao, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Ann. of Math. (2)* 167(2) (2008), 481–547.

21 M. Hairer, An introduction to stochastic PDEs, 2009, arXiv:0907.4178.

22 M. Hairer, Solving the KPZ equation, *Ann. of Math. (2)* 178(2) (2013), 559–664.

23 G.H. Hardy, Weierstrass's non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 17(3) (1916), 301–325.

24 G.H. Hardy, Prolegomena to a Chapter on Inequalities, *J. London Math. Soc.* 4(1) (1929), 61–78.

25 G.H. Hardy, J.E. Littlewood en G. Polya. *Inequalities*, Cambridge University Press, 1952, 2nd ed.

26 L. Hörmander, Linear partial differential operators, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116, Academic Press/Springer, 1963.

27 T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar en L. Weis, *Analysis in Banach Spaces, Vol. I: Martingales and Littlewood-Paley Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 63, Springer, 2016.

28 T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar en L. Weis. *Analysis in Banach Spaces, Vol. II: Probabilistic Methods and Operator Theory,* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 67, Springer, 2017.

29 O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Probability and its Applications, Springer, 2002, 2nd ed.

30 N. Kalton en L. Weis. The H^∞-calculus and sums of closed operators, *Math. Ann.* 321(2) (2001), 319–345.

31 N.V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces,* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 12, American Mathematical Society, 1996.

32 N.V. Krylov, *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces,* Graduate Studies in Mathematics, Vol. 96, American Mathematical Society, 2008.

33 O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov en N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, 1968.

34 L. Maligranda, Jozef Marcinkiewicz (1910–1940) – On the centenary of his birth, in *Marcinkiewicz Centenary Volume*, Banach Center Publ., Vol. 95, Polish Acad. Sci. Inst. Math., 2011, pp. 133–234.

35 A. McIntosh, Operators which have an H_∞ functional calculus, in *Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations (North Ryde, 1986)*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., Vol. 14, Austral. Nat. Univ., 1986, pp. 210–231.

36 J. Prüss en G. Simonett, *Moving Interfaces and Quasilinear Parabolic Evolution Equations,* Monographs in Mathematics, Vol. 105, Birkhhäuser/Springer, 2016.

37 M. Reed en B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press, 1972.

38 D. Revuz en M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion,* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Vol. 293, Springer, 1991.

39 W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987, 3rd ed.

40 J.M. Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class – An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, MAA Problem Books Series, Mathematical Association of America/Cambridge University Press, 2004.

41 T. Tao, Soft analysis, hard analysis, and the finite convergence principle, 2008, https://terrytao.wordpress.com/2007/05/23.

42 A. Warwick, *Masters of Theory: Cambridge and the Rise of Mathematical Physics*, University of Chicago Press, 2003.

43 L.W. Weis, Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity, *Math. Ann.* 319(4) (2001), 735–758.

44 D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer, 2000, extended edition.

45 J. Wynne, *Do Not Erase*, Princeton University Press, 2020. Zie ook https://www.nytimes.com/2019/09/23/science/mathematicians-blackboard-photographs-jessica-wynne.html.