EINDEXAMEN WISKUNDE A, HAVO, 2019-05-09

Dit leek meer werk dan Wiskunde B, in ieder geval neemt deze uitwerking meer ruimte in beslag.

1 Via $I = 10^{0{,}1d-9}$ bekijken hoeveel procent minder $I(74)$ is dan $I(80)$.
Uitwerking: Het quotiënt is $I(74)/I(80) = 10^{-1{,}6}/10^{-1} = 10^{-0{,}6} \approx 0{,}2511886432$; dat betekent een afname van 75%.
Opmerkingen: Ziet er niet moeilijk uit.

2 De helling van de verbindingslijn van $(0, 73{,}7)$ en $(84, 77)$ bepalen.
Uitwerking: Recht voor zijn raap

$$a = \frac{77 - 73{,}7}{84 - 0} \approx 0{,}039\ldots$$

Opmerkingen: Niet moeilijk

3 Via $d = 0{,}4t + 73{,}7$ bepalen wanneer de geluidsintensiteit $0{,}058\,\mathrm{mW}$ is.
Uitwerking: Er komt $0{,}058 = 10^{0{,}004t-1{,}63}$. Via logaritmen maken we daar $\log 0{,}058 = 0{,}004t - 1{,}63$ van, en dus $0{,}004t = 1{,}63 + \log 0{,}058$. Oplossen: $t = 98.3569985$, afgerond: 98 maanden.
Opmerkingen: Het model laat veel oploswegen open.

4 Homeopathie en verdunningen. Hoe dun is een C6-oplossing?
Uitwerking: We lezen dat C6 staat voor zes maal hondervoudig verdunnen. Dat geeft een verdunning van $100^6 = 10^{12}$, of een concentratie van 10^{-12}.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

5 Bepaal de verdunningsfactor van een LM-verdunning. Gegeven is dat zo'n verdunning een reductie van 99,998% betekent.
Uitwerking: We moeten dus 0,002% omwerken; dat is $0{,}00002 = 2 \cdot 10^{-5}$, en dat is gelijk aan 1/50.000.
Opmerkingen: De letters gaven al aan dat 50 en 1000 een rol spelen, dus 50.000 komt niet onverwacht.

6 Laat zien dat $P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ gelijk is aan 10^{2-n}.
Uitwerking: $P = 10^2 \cdot 10^{-n} = 10^{2-n}$.
Opmerkingen: Is dit echt een examenvraag? Wie dit niet kan heeft bij andere sommen grotere problemen.

7 Een D12-verdunning komt overeen met één waterdruppel in twintig zwembaden.
Uitwerking: Een waterdruppel is $0{,}05\,\mathrm{ml}$ en een zwembad is $2.500.00\,\mathrm{l}$. Twintig zwembaden is dus $50.000.000\,\mathrm{l}$ ofwel 5×10^7 liter. De waterdruppel is 5×10^{-5} liter. Het quotiënt van de twee is dus 10^{-12} en dat komt inderdaad overeen met een D12-verdunning.
Opmerkingen: Niet moeilijk, wel opletten.

8 Het aantal scores dat onder het gemiddelde minus twee standaarddeviaties ligt is wat je op grond van normaliteit zou kunnen verwachten.
Uitwerking: De vuistregel zegt dat 95% van een normaal verdeelde populatie binnen twee standaarddeviaties van het gemiddelde ligt. Links daarvan ligt dus 2,5% en 2,5% van 950 is 23,75. In de tabel gaat het om scores kleiner dan $22{,}5 - 2 \cdot 6{,}9 = 8{,}7$ en dat zijn er 24.
Opmerkingen: Wel de vuistregel kennen. Verder makkelijk.

9 Het verschil tussen modus en mediaan van de verdeling van de scores bij Engels bepalen.
Uitwerking: In figuur 2 zien we dat de modus gelijk is aan 39. De helft van de populatie Engels is $45813/2 = 22406{,}5$. Dat getal wordt overschreden bij de overgang van score 35 naar score 36.
Het antwoord is dus $39 - 36 = 3$.
Uitwerking: Flauw, *mits* je de definities kent.

10 Het percentage onvoldoenden bij Engels is iets meer dan de helft van het percentage onvoldoenden, 22,8%, bij Filosofie.
Uitwerking: Er zijn 5530 onvoldoenden, en $5530/45813 = 0{,}1207080960$; dat is dus ongeveer 12% en dat is iets meer dan 11,4%.
Opmerkingen: Eenvoudig rekenwerk.

11 Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage onvoldoenden voor Filosofie.
Uitwerking: De fractie, p, onvoldoenden is gelijk aan 217/950. Die stoppen we in de formule "fractie plus/min tweemaal standaarddeviatie". We krijgen na invullen het interval $(0{,}2011798396, 0{,}2556622656)$ voor de fractie en dus $20{,}1, 25{,}6)$ voor het percentage.
Opmerkingen: Niet moeilijk als je de definitie kent.

12 Een uitlegvraag: hoe kan men de samenhang tussen de scores Engels en Filosofie (zo die er is) onderzoeken.
Uitwerking: De scores van alle kandidaten die beide vakken gedaan hebben verzamelen en de (geordende) paren van die scores plotten.
Opmerkingen: Een goede vraag.

13 Via de veilige-afstandfunctie $A = v\left(\frac{v}{118} + 0{,}14\right)$ uitvlooien of 50 m een veilige afstand is bij 93 km/h.
Uitwerking: Vul $v = 93$ in: $A = 59$, en dat is meer dan 50, dus de afstand is niet veilig.
Opmerkingen: Invullen, verder niks.

14 Beredeneer dat A groter wordt als v groter wordt.
Uitwerking: Je kunt de formule uitwerken:

$$A = \frac{1}{188}v^2 + 0{,}14v$$

en dat is een stijgende functie voor positieve v.
Opmerkingen: De modeluitwerking komt neer op "het product van stijgende functies is stijgend", maar noemt dat niet evenmin als de voorwaarde dat positiviteit nodig is. Het klinkt allemaal wat tautologisch.

15 De hoeveelheid wegdek, W, die een auto nodig heeft is gelijk aan A plus de lengte van de auto. Werk de haakjes weg in W, aangenomen dat de auto 4,5 m lang is en schrijf de coëfficiënten in twee decimalen.
Uitwerking: We krijgen

$$W = A + 4{,}5 = \frac{1}{188}v^2 + 0{,}14v + 4{,}5 \approx 0{,}005319148936v^2 + 0{,}14v + 4{,}50$$

in twee decimalen wordt dat $0.01v^2 + 0{,}14v + 4{,}50$.
Opmerkingen: Flauwe vraag; is haakjes wegwerken echt zo moeilijk?

16 De capaciteit van een weg in auto's per uur als functie van de snelheid is gegeven door

$$C = \frac{1000v}{4{,}5 + 0{,}09v + 0{,}0035v^2}$$

Gevraagd bij welke snelheid c maximaal is.
Uitwerking: De teller van de afgeleide van C is gelijk aan (afgezien van de factor 1000)

$$4{,}5 + 0{,}09v + 0{,}0035v^2 - v(0{,}09 + 0{,}0070v) = 4{,}5 - 0{,}0035v^2$$

Het positieve nulpunt is $\sqrt{4{,}5/0{,}0035} \approx 35.856858$. In hele kilometers is dat 36 km.
Opmerkingen: De modeluitwerking geeft geen indicatie van hoe een geldige redenering eruit ziet.

17 Bij welke snelheid is de capaciteit ten minste gelijk aan 2500 auto's per uur.
Uitwerking: We moeten dus

$$\frac{1000v}{4{,}5 + 0{,}09v + 0{,}0035v^2} = 2500$$

oplossen. Met Maple's `solve`-commando vinden we $v = 18{,}29513514$ of $v = 70{,}27629343$; in gehele kilometers is dit 70 km/h.
Opmerkingen: Ook hier geeft de modeluitwerking geen aanwijzing hoe een correcte uitwerking eruit ziet; ik heb Maple maar gebruikt.

18 Met gebruik van een lijst tellingen uitzoeken wanneer de maximum snelheid van 130 km/h omlaag moet om de capaciteit te verhogen.
Uitwerking: Bij $v = 130$ is C gelijk aan 1725,282017, dat is dus 1725 hele auto's. Per vijf minuten is dat 143 hele auto's. In de tabel zien we dat dat in het interval tussen 7:15 en 7:20 niet meer volstaat.
Opmerkingen: In principe niet moeilijk.

19 Uit een grafiek op logaritmisch papier aflezen na hoeveel minuten, bij pasteurisatie, 90% van de bacteriën afgestorven is.
Uitwerking: We beginnen bij $3 \cdot 10^8$ en 10% daarvan is $3 \cdot 10^7$. De lijn op de grafiek haalt dat aantal bij 1 minuut.
Opmerkingen: Goed kijken. Dit kan overigens ook uit de toelichting bij de som worden afgeleid: Op tijdstip 0 hebben we $3 \cdot 10^8$ bacteriën, en op tijdtsip 6 hebben we er $3 \cdot 10^2$; dus in zes minuten gaan we met een factor 10^{-6} omlaag; elke minuut een factor $\frac{1}{10}$ dus.

20 Uitgaande van een diagram met grafieken van verhittingstijden bij diverse diameters van worsten moet de verhittingstijd tegen de diameter worden uitgezet bij een temperatuur van 75° C
Uitwerking: Zie het examen: neem de verticale lijn bij temperatuur 75° C en meet (of lees af) de y-coördinaten van de snijpunten van de grafieken bij de verschillende diameters. Zet deze vervolgens uit in het diagram op de uitwerkbijlage.
Opmerkingen: De in de modeluitwerking opgegeven tijden zijn veel te precies; de verticale zijden van de vierkantjes in het diagram zijn 50 eenheden lang en zelfs als ik ze op mijn scherm tot 2-bij-2 centimeter vergroot kan ik 53 (dat is 1,2 mm) niet onderscheiden van 52 (1 mm) of van 54 (1,4 mm). Gelukkig liet de uitwerking een marge van vijf minuten toe.

21 Uitgaande van de formule $V = 0{,}7d + 0{,}0089d^2$ (verhittingstijd als functie van de diameter (in millimeters) bij 78° C) berekenen hoe lang een worst met diameter 4,5 cm verhit wordt.
Uitwerking: Vul $d = 45$ in de formule in: $V = 49.5225$, afgerond 50 hele minuten.
Opmerkingen: Gewoon invullen.

22 Bij 78° C, wat is de maximale diameter van een worst als het verhittingsproces te hoogste 2,5 uur mag duren?
Uitwerking: We moeten dus $0{,}7d + 0{,}0089d^2 = 150$ oplossen. Oplossing: $d = 96{,}32243222$, afgerond op hele mm: $d = 96$.
Opmerkingen: Ik heb Maple's `solve` maar weer gebruikt (zie opgaven 16 en 17).

23 Uitgaande van twee tabellen bepalen in welk jaar het aantal gestolen auto's boven dat van 2005 uitkomt.
Uitwerking: In een tabel krijgen we aantallen verkochte auto's (in miljoenen): $(2001, 6{,}55)$, $(2004, 6{,}9)$, $(2007, 7{,}24)$, $(2010, 7{,}59)$, $(2013, 7{,}93)$. Voor de grap een kleinste-kwadraten benadering gedaan; ik kreeg $A = 0{,}11500Y - 223{,}56300$; die klopt aardig, zie het plaatje op de volgende.
Verder wordt ongeveer 0,15% van de auto's gestolen. En in 2005 werden 13.750 auto's gestolen. We moeten dus kijken wanneer $0{,}0015 \cdot A \cdot 10^6$ groter wordt dan 13.750. Dus oplossen:

$$0{,}0015 \cdot (0{,}11500Y - 223{,}56300) \cdot 10^6 \geqslant 13.750$$

Dat geeft $Y \geqslant 2023{,}736232$, in hele jaren verwachten we dus dat in 2024 er meer auto's gestolen worden dan in 2005.
Opmerkingen: In de modeluitwerking wordt de rechte lijn door $(2001, 6{,}55)$ en $(2013, 7{,}93)$ doorgetrokken, of beter, door $(2001, 6{,}55 \cdot 10^6)$ en $(2013, 7{,}93 \cdot 10^6)$ en nog — verticaal — vermenigvuldigd met 0,0015. Het antwoord blijft hetzelfde.