EINDEXAMEN WISKUNDE A, VWO, 2019-05-20

1 Uit een trendlijn een schatting maken van het aantal goudplevieren in 2020.
Uitwerking: Op het oog: in 2008 waren er 31.000 vogels en in 2010 waren het er 28.000. Uitgaane van 2010 komen we dan op

$$28.000 + 10 \times 28.000 - 31.0007$$

met de duizendtallen even weggelaten komen we op $20 - \frac{30}{7} = 23\frac{5}{7}$. Afgerond komen we op 24.000 goudplevieren in 2020.
Opmerkingen: Per ongeluk had ik dezelfde schattingen als in de modeluitwerking (ik had geen liniaal o.i.d. bij me). Later, door een liniaal langs de grafiek te leggen kwam ik ook op 24.000 uit. Het zag er iets te bewerkelijk uit.

2 Uitgaande van twee figuren nagaan of twee beweringen waar zijn.
Uitwerking: I. De gewichtstoename per dag van de vogels is in het voorjaar ongeveer twee keer zo groot als in het najaar.
Ik vind van niet, bij dag 20 is vanaf het snijpunt de najaarsgroei 4 mm groter, en de voorjaarsgroei is 16 mm gestegen; dat is ongeveer vier maal.
II. De gewichtstoename in het voorjaar is niet aan vet te danken.
Dit klopt: de hoeveelheid vet neemt niet toe, het gewicht wel.
Opmerkingen: Wel grappig.

3 De formule

$$P = \frac{1600}{2{,}3t + 198}$$

voor het vetpercentage in het voorjaar afleiden/aflezen uit de figuren.
Uitwerking: We moeten gebruiken dat de gewichtslijn door $(0, 198)$ en $(20, 244)$ gaat. Die lijn heeft helling $\frac{244-198}{20} = \frac{23}{10}$, dus $G = 2{,}3t + 198$. De hoeveelheid vet is constant 1600. Nu het quotënt nemen.
Opmerkingen: Niet slecht.

4 Beredeneren of het percentage stijgt of daalt, *met behulp van de formule.*
Uitwerking: Het is een breuk met constante teller en stijgende noemer; dat resulteert in een dalende functie.
Opmerkingen: Een nuttige opgave. Studenten hebben met dit verschijnsel ook (nog steeds) moeite.

5 Voor het najaar krijgen we de volgende vetpercentagefunctie

$$P = \frac{2300 + 60t}{207 + 0{,}6t}$$

Met behulp van de afgeleide uitzoeken of P afnemend stijgend is
Uitwerking: De afgeleide, P', is gelijk aan

$$\frac{11040}{(207 + 0{,}6t)^2}$$

Dat is een positieve functie, dus P is stijgend en de afgeleide zelf daalt naar 0, dus de stijging neemt af.
Opmerkingen: Het zou aardiger zijn om niet zo te sturen. Waarom mogen de leerlingen niet zelf bedenken dat de afgeleide zou kunnen helpen. Overigens laat P zich vereenvoudigen tot

$$100\frac{2{,}3 + 0{,}6t}{207 + 0{,}6t} = 100\left(1 - \frac{204{,}7}{207 + 0{,}6t}\right)$$

Hieruit kun je, als in de vorige opgave ook aflezen dat P stijgt en dat de stijging afneemt: de functie stijgt naar zijn limiet 100.

6 Hoeveel kentekens zijn er van sidecode 7, dat wil zeggen: twee cijfers, drie letters, één cijfer
Uitwerking: Alle mogelijkheden vermenigvuldigen:

$$10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 = 17.576.000$$

Op hele honderduizenden afgerond: $17{,}6 \times 10^5$.
Opmerkingen: Niet moeilijk. Ik zie niet waarom je dit zou afronden.

7 Er zijn wat eisen opgelegd aan de combinaties: geen 00 aan het begin, eerste letter komt een groep van twaalf, geen klinkers (dat zijn er zes), C en Q mogen ook niet, en er zijn nog 82 uitgesloten combinaties van drie letters. Is dit meer of minder dat 20% van het eerder bepaalde totaal?
Uitwerking: We krijgen nu

$$99 \times 12 \times 18 \times 18 \times 10 = 3849120$$

mogelijkheden. Als we dit door het totaal delen komen we op 0,2189986345. Dat is net wat meer dan 20% (die 82 uitgesloten combinaties leggen weinig gewicht in de schaal; het quotiënt zou niet kleiner zijn dan 0,2189939690).
Opmerkingen: Eenvoudig rekenwerk. De GR kan beide getallen aan, dus waarom zou je afronden?

8 Het aantal verkochte nieuwe autos in maand n wordt gegeven door $A_n = -375n + 37.250$ (een trendlijn). Hierin is maart 2013 de nulmaand. In een grafiek is te zien dat de formule voor mei 2013 een te hoog aantal verkochte auto's geeft. Hoeveel procent te hoog?
Uitwerking: De grafiek geeft voor mei 2013 een aantal van 30.000; de formule geeft $A_2 = -2 \cdot 375 + 37.250 = 36.500$. Dat is 6000 auto's te veel en 6500 van 30000 is 21,666%, in hele procenten is dat 22%.
Opmerkingen: Niet erg diepzinnig.

9 Geef een recursieve formule voor de A_n.
Uitwerking: Een recursieve formule is $A_0 = 37.250$, en $A_{n+1} = A_n - 375$.
Opmerkingen: Ik zie niet hoe dit uitgebreider zou kunnen. Volgens het model hoeft dat ook niet. Ik vond dit nogal teleurstellend. De A_n werd met veel bombarie ingeleid: een heel verhaal over sidecode 8 die in maart 2013 in gebruik werd genomen en die 1,46 miljoen kentekens zou opleveren en een model (de A_n) opgesteld door een journalist die wilde onderzoeken hoe lang sidecode 8 mee zou gaan .... Niets van dat al was in de opgaven terug te vinden. We kregen twee relatief flauwe rekensommetjes die *niets* met de probleemstelling te maken hadden.

10 Uit een uitslag moet afgelezen worden wat de inhoud van een 3 cm hoge doos gaat worden. Gegevens: hoogte plus breedte plus hoogte is samen 30 cm en hoogte plus lengte plus hoogte plus lengte is samen 40 cm; dit is uit de uitslag af te lezen.
Uitwerking: Uit de gegevens volgt dus $2h + b = 30$ en $2h + 2l = 40$; met $h = 3$ volgt $b = 24$ en $l = 27$. De inhoud is dus $3 \cdot 17 \cdot 24 = 1224\,\text{cm}^3$.
Opmerkingen: Recht toe recht aan rekenwerk.

11 De correctheid van de formule

$$V = 2h^3 - 70h^2 + 600h$$

voor het volume als functie van h moet worden aangetoond.
Uitwerking: Uit de vergelijkingen halen we $b = 30 - 2h$ en $l = 20 - h$. Dus $V = h \cdot (30 - 2h) \cdot (20 - h)$ en dat levert, uitvermenigvuldigd, inderdaad de gegeven formule.
Opmerkingen: Eenvoudige algebra.

12 Neem $p \neq 0$ en bekijk de punten P, Q en R op de grNu berekenen, met behulp van differentëren voor welke h (met $h \leqslant 15$) het volume maximaal is.
Uitwerking: De afgeleide van V is $6h^2 - 140h + 600$. De nulpunten zijn, *abc*-formule,:

$$\frac{35}{3} \pm \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

bij benadering: 17,67591880 en 5,657414544.D De afgeleide geeft een dalparabool, dus V stijgt tot $h \approx 5{,}657414544$ en daalt dan tot 15. De tweede oplossing doet niet mee, want uit de uitslag blijkt dat $h \leqslant 15$. Dus bij

$$h = \frac{35}{3} - \frac{5\sqrt{13}}{3} \approx 5{,}657414544$$

is het volume maximaal (dat maximum is $\frac{1}{27}(17500 + 6500\sqrt{13})$).
Opmerkingen: Wel veel voorgekauwd "door differentiëren ..." maar niet moeilijk.

13 Na een heel verhaal over verpakkingsefficiëntie moet de juistheid van de volgende formule van voor efficiëntie van een verpakking met volume V en oppervlakte A aangetoond worden:

$$E = \frac{V}{4{,}19(\sqrt{0{,}08A})^3}$$

Uitwerking: De volumes voor inhoud en oppervlakte van een bol met straal r worden in afgeronde vorm gegeven: respectievelijk $4{,}19r^3$ en $12{,}57r^2$. Het gaat er dus om de inhoud van de bol in zijn oppervlakte uit te drukken. Dus $r^2 = A/12{,}57 = 0{,}07955A$, afgerond: $r = \sqrt{0{,}08A}$. En nu in de formule voor de inhoud invullen: $V_{bol} = 4{,}19(\sqrt{0{,}08A})^3$.
Opmerkingen: Niet al te ingewikkelde algebra. Ik vind $(\sqrt{0{,}08A})^3$ niet zo mooi; ik zou graag $A^{\frac{3}{2}}$ of $A\sqrt{A}$ afgezonderd hebben gezien en de $4{,}19 \cdot 0{,}08^{\frac{3}{2}}$ tot één constante teruggebracht.
In het 'echt' hebben we natuurlijk $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}}$, en dan

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{A\sqrt{A}}{\pi\sqrt{\pi}} = \frac{1}{6\sqrt{\pi}}A\sqrt{A}$$

Ook hier: het hele verhaal had eigenlijk niets met de wiskunde in de opgave te maken.

14 Naar aanleiding van onderzoek naar aardbevingen in Groningen worden drie stellingen geformuleerd. Kloppen die?
Uitwerking: 1. De gasproductie en het aantal aardbevingen zijn over de periode 2000–2011 procentueel evenveel gestegen.
In de eenheden steeg de gasproductie van 22 naar 47 (iets meer dan een verdubbeling); het aantal bevingen van 3 naar 31 (bijna een vertienvoudiging). Die bewering klopt dus niet.
2. Als na 2000 de gasproductie daalt daalt het aantal bevingen een jaar later.
Nee: van 2002 naar 2003 daalt de gasproductie aanzienlijk maar het aantal bevingen grooeit in het interval 2003–2005.
3. In 2005–2011 stijgt het aantal bevingen per jaar (gemiddeld) sterker dan in 1998–2004.
Over 1998–2004 is de gemiddelde stijging gelijk aan $(11-6)/6 = 5/6$ en over 2005–2011 is dat $(31-17)/6 = 14/16$ en dat is een stuk groter. Dus waar.
Opmerkingen: Een goede praktische vraag.

15 Nu naar de kracht/magnitude van de bevingen. Hoeveel procent van de bevingen in of voor augustus 2012 met magnitude 2.0 of meer heeft ook een kracht van 2.5 of meer?
Uitwerking: Het eerste aantal ligt ergens tussen de 60 en 70, logaritmisch ongeveer op twee-derde, ik kom op 66,5; het tweede aantal vrij dicht bij de 20, logaritmisch op een kwart tussen 20 en 30, ik kom op 22. Dat geeft ongeveer 33%.
Opmerkingen: Een beetje bewerkelijk, ik moest wel erg inzoomen op mijn scherm voor redelijke schattingen.

16 Het aantal bevingen met kracht 1,5 of meer is te beschrijven door $A = 12 \cdot \mathrm{e}^{0{,}013t}$ met t in maanden, gerekend vanaf april 1994. Geeft de waarde van de afgeleide voor $t = 117$ (door differentiëren) en de betekenis van die waarde.
Uitwerking: De afgeleide is $0{,}013 \cdot 12 \cdot \mathrm{e}^{0{,}013t}$, vul $t = 117$ in, er komt 0,7139807543, dus 0,7 op één decimaal En dat betekent dat het aantal bevingen met kracht 1,5 of meer met 0,7 per maand toeneemt.
Opmerkingen: Weer "door differentëren", waarom? Verder niet moeilijk.

17 Het aantal bevingen met magnitude 2,0 of meer heeft een dergelijke formule: de logaritmische lijnen zijn (min of meer) evenwijdig. Deze is 85 maanden later op dezelfde hoogte als de grafiek voor 1.5 of meer. Uit vier mogelijkheden moet de formule voor 2,0 of meer worden gekozen.
Uitwerking: We krijgen

$$A_{2,0} = 12 \cdot \mathrm{e}^{0{,}013(t-85)}$$

omdat dan $A_{2,0}$ de juiste tijd achterloopt bij $A_{1,5}$.

18 Het verband tussen de magnitude en percentage aardbevingen ziet er exponentieel dalen uit. Zo heet 10% een krcaht van 1,0 of meer. De formule is

$$N = 10^{a-M}$$

Hierin is M de magnitude, en N het percentage. We moeten laten zien dat $a = 2$.
Uitwerking: Vul het gegeven in: $10 = 10^{a-1}$, dus $a - 1 = 1$, en dus $a = 2$.
Opmerkingen: Een beetje flauw, vind ik.

19 Herleid $N = M^{2-M}$ tot de vorm $M = p + q \cdot \log N$.
Uitwerking: We hebben $\log N = 2 - M$, dus $M - 2 - \log N$.
Opmerkingen: Definitie van de logaritme toepassen.

20 Het hek langs het Zandpad in Utrecht leidt tot een bespiegeling over twee sinusoïden. De onderste wordt beschreven door

$$S_o = 100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

De toppen van S_o liggen op de evenwichtstand van de bovenste; de amplitudes zijn gelijk. De sinusoïden raken elkaar bij $x = \frac{1}{2}$ en $x = 6 + \frac{1}{2}$. Geef een formule voor S_b.
Uitwerking: De evenwichtstand van S_b is $100+50 = 150$. Dus we beginnen met $S_b = 150+50\sin(a(x-b))$.
De perioden van S_o en S_b zijn gelijk; dat blijkt vooral uit de bijgevoegde foto, niet direct uit de gegevens. Dus $a = \frac{\pi}{3}$.
Nu b nog. Vul $x = \frac{1}{2}$ in in beide formules:

$$100 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2} - b\right)\right)$$

Nu wat uitwerken komen we op $\sin\left(\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2} - b\right)\right) = -\frac{1}{2}$, en dus $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2} - b\right) = -\frac{\pi}{6}$ of $\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2} - b\right) = -\frac{5\pi}{6}$, plus eventueel een veelvoud van 2π. Dat geeft $b = 1$ of $b - 3$.
Nu nog zorgen dat de raaklijnen dezelfde richting hebben. Na differentiëren en vereenvoudigen krijgen we de eis $\cos\frac{\pi}{6} = \cos(\frac{\pi}{3}(\frac{1}{2} - b))$. Die klopt wel bij $b = 1$ maar niet bij $b = 3$. Dus

$$S_b = 150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}(x - 1)\right)$$

Opmerkingen: Dit was wat meer werk dan de andere opgaven en zal wat meer denkwerk hebben gevergd. De modeluitwerking is niet volledig: de tweede oplossing ($b = 3$) die ik met behulp van de afgeleide heb uitgesloten werd niet genoemd ook al is het wel degelijk een oplossing van

$$150 + 50 \sin\left(\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2} - b\right)\right) = 125$$

Ook de periode kwam niet echt uit de verf.