EINDEXAMEN WISKUNDE B, HAVO, 2019-05-09

1 Bij gelijke T en D wordt het verschil tussen de geluidssnelheden in de Dode Zee en de Kaspische Zee wel heel eenvoudig. Er komt

$$v_D - v_K = 1{,}391(Z_D - Z_K) = 1{,}391 \times 325 = 452.075$$

Afgerond op gehele m/s is dat dus 452 m/s.

2 Deze vraag komt neer op de vraag voor welke T de uitdrukking

$$4{,}623T - 0{,}0546T^2$$

maximaal is. Dat is van de vorm $bT - aT^2$ en zoiets is maximaal bij $T = \frac{b}{2a}$, hier wordt dat $T = 4{,}623/(2 \times 0{,}0546) = 42{,}335\ldots$, afgerond: 42,3° C.

3 De afstand is gelijk aan de het product van de vigerende geluidssnelheid en de helft van de opgegeven tijd. Ik kom op 9277,138248 m ofwel 92,77138248 hm.
Opmerkingen: Deze eerste drie vragen bevatten veel tekst, maar kwamen uiteindelijk neer op eenvoudig rekenwerk.

4 De lijn $y = \frac{3}{4}x$ raakt de grafiek van $y = -3 + 3\sqrt{x}$ in $A = (4, 3)$.
Uitwerking: Het punt ligt op de lijn, en op de grafiek (invullen) en de afgeleide van y naar x is gelijk aan $\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; in het punt A heeft die de waarde $\frac{3}{4}$ en dat is gelijk aan de helling van de lijn.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

5 De cirkel met middelpunt M op de lijn $x = 5$ raakt de lijn $y = \frac{3}{4}x$ in A. Aan te tonen: de cirkel raakt de x-as.
Uitwerking: Het middelpunt ligt op de lijn m door A loodrecht op de gegeven lijn. De richtingscoëfficiënt van m is dus $-\frac{4}{3}$. Dat betekent dat $(y_M - 3)/(5 - 4)$ gelijk is aan $-\frac{4}{3}$, als je dat uitwerk komt er $y_M = \frac{5}{3}$. De afstand van A tot M is dan $\frac{5}{3}$ (Pythagoras), dat is dus de straal. Die straal is ook gelijk aan de afstand van M tot de x-as; de cirkel raakt dus de x-as in $(5, 0)$.
Opmerkingen: Aardige opgave.

6 Twee functies gegeven door $f(x) = 2^{\frac{1}{2}x+3}$ en $g(x) = 4^x$. Gevraagd het snijpunt, A, van de grafieken.
Uitwerking: We moeten dus $2^{\frac{1}{2}x+3} = 4^x$ of $2^{\frac{1}{2}x+3} = 2^{2x}$ oplossen. Dat wordt $\frac{1}{2}x + 3 = 2x$, en dus $x = 2$, en $f(2) = g(2) = 16$.
Opmerkingen: Niet moeilijk.

7 De vergelijking $y = f(x)$ moet naar x opgelost worden.
Uitwerking: Dit gaat het best met logaritmen: ${}^2\log y = \frac{1}{2}x + 3$ en dus $x = {}^2\log y^2 - 6$.
Opmerkingen: Dit ziet er flauw uit (maar voor velen zijn logaritmen lastig).

8 De vorm van de bovenrand van een tennisnet is (bij benadering) een parabool met vergelijking $y = px^2 + q$. Gevraagd p en q af te leiden uit de hoogte in het midden, 0,91 m, en aan de uiteinden: 1,07 m. Het net is 10,06 m breed.
Uitwerking: Het midden ligt bij $x = 0$, dus $q = 0{,}91$. Aan de uiteinden geldt $x = \pm 5{,}03$ en $y = 1{,}07$, dus $1{,}07 = p \cdot 5{,}03^2 + 0{,}91$. Dit geeft $p = (1{,}07 - 0{,}91)/5{,}03^2 = 0{,}006323885712$; in drie decimalen: 0,006.
Opmerkingen: Goed dat er drie decimalen gevraagd werden. Maar, zoals elders opgemerkt is het niet zo netjes naar drie decimalen te vragen als alles in twee decimalen gegeven is. En eigenlijk ziet "q in twee en p in drie decimalen" er nogal knullig uit. Beter zou zijn p af te laten ronden naar 0,01.

9 Een lang verhaal leidt tot de vraag of een snijpunt van twee lijnen binnen of buiten een rechthoek ligt.
Uitwerking: De lijn vanuit A heeft helling $p = \tan 45{,}4° \approx 1{,}014061027$ en die vanuit B heeft helling $q = \tan 44{,}2° \approx 0{,}9724575083$. We doen alsof $A = (0, 0)$, dan geldt $B = (10{,}97, 0)$. De lijn vanuit A heeft vergelijking $y = px$, de lijn vanuit B heeft vergelijking $y = -q(x - 10{,}97)$. Het snijpunt van de lijnen is dan $(5{,}370128031, 5{,}445637546)$. Ten opzichte van het punt $P = (5{,}485, 5{,}49)$ ligt dat punt naar links en naar beneden; de bal is dus uit.

Uitwerking: Wel aardig, wel nauwkeurig rekenen. Overigens was niet expliciet gegeven dat QP in het midden ligt. Gelukkig is dat niet nodig: de tweede coördinaat van het snijpunt is te klein, dus de bal is uit.

10 De (grafiek) van de functie gegeven door $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^3$ ontstaat uit die van $y = x^3$. Door twee bewerkingen uit te voeren. Welke, en in welke volgorde?
Uitwerking: Het kan via $x \mapsto \frac{1}{2}x \mapsto \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2}(x-4)$. Dat betekent eerst horizonaal oprekken met een factor 2 en dan 4 naar rechts schuiven. Men kan ook $x \mapsto x - 2 \mapsto \frac{1}{2}x - 2$ doen: eerst 2 naar rechts en dan vermenigvuldigen met 2 ten opzichte van de y-as.
Opmerkingen: Dit is vast veel geoefend.

11 De grafiek van f heeft in het snijpunt met de x-as een horizontale raaklijn.
Uitwerking: Het snijpunt is $(4, 0)$ en $f'(x) = 3(\frac{1}{2}x - 2)^2 \cdot \frac{1}{2}$, dus $f'(4) = 0$ — klaar.
Opmerkingen: Dit leek mij te makkelijk ... maar de modeluitwerking was wel erg uitgebreid.

12 Gevraagd de afstand tussen de twee snijpunten, verschillend van A, van de grafiek van f met de lijn $y = \frac{1}{2}x - 2$.
Uitwerking: Op te lossen $\frac{1}{2}x - 2 = (\frac{1}{2}x - 2)^3$; dat geeft drie mogelijkheden voor $\frac{1}{2}x - 2$, namelijk -1, 0, en 1. Met achtereenvolgens $x = 2$, $x = 4$, en $x = 6$. De waarde $x = 4$ hoort bij A; $x = 2$ geeft $P = (2, -1)$ en $x = 6$ geeft $Q = (6, 1)$. De afstand van P tot Q is dus $\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \approx 4{,}47$.

13 De snijpunten van de grafiek van $y = 1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$ met domein $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ zijn achtereenvolgens P, Q, R, en S. Gevraagd de verhouding $PS : QR$.
Uitwerking: Los op $1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$, of $\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$, en dus $2x + \frac{1}{3}\pi$ is gelijk aan, achtereenvolgens, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{8}{3}\pi$ en $\frac{10}{3}\pi$. Dat geeft vier waarden voor x: $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$ en $\frac{3}{2}\pi$. De gevraagde verhouding is gelijk aan $(\frac{3}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi)/(\frac{7}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi) = 2$.
Opmerkingen: Standaard goniowerk.

14 Herschrijf

$$f(x) - 2 + 5\cos\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$$

in de vorm $p + q\cos(r(x - s))$.
Uitwerking: We krijgen $-1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) + 5\cos(2x - \frac{1}{2}\pi)$; via gonioformules maken we daar $-1 + \cos 2x + (5 - \sqrt{3})\sin 2x$ van. Via fase-amplitude halen we $\sqrt{29 - 10\sqrt{3}}$ buiten de haakjes:

$$-1 + \sqrt{29 - 10\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{29 - 10\sqrt{3}}}\cos 2x + \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{29 - 10\sqrt{3}}}\sin 2x\right)$$

Neem de hoek θ in $[0, 2\pi]$, die voldoet aan $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{29-10\sqrt{3}}}$ en $\sin\theta = \frac{5-\sqrt{3}}{\sqrt{29-10\sqrt{3}}}$, dus $\theta \approx 1{,}2738$; dan staat er

$$-1 + \sqrt{29 - 10\sqrt{3}} \cdot \cos(2x - \theta),$$

dus $p = -1$, $q = \sqrt{29 - 10\sqrt{3}}$, $r = 2$, en $s = \theta/2 \approx 0{,}64$.
Opmerkingen: Dat was dus niet de bedoeling ...

15 Aflezen van de kracht van een aardbeving uit een nomogram.
Uitwerking: De lijn van 100 km naar 1 mm gaat door 3, en die van 100 km naar 0,1 mm gaat door 2. Dus de kracht van de eerste is 1 groter dan die van de tweede.

16 De oppervlakte van een rampgebied uit een formule voor de kracht. Gegeven $K = 7{,}9$ bepaal D waar $A = 1000\,\mathrm{mm}$.
Uitwerking: We krijgen

$$7{,}9 = \log 1000 + 3 \cdot \log D - 3{,}38$$

Dat geeft $3\log D = 7{,}85 + 3{,}38 - 3 = 8{,}28$, dus $\log D = 2{,}76$. We vinden $D \approx 575{,}44\,\mathrm{km}$. De oppervlakte is πD^2 en dat is $1.040.279,\mathrm{km}^2$ op duizendtallen afgerond: $1.040.000\,\mathrm{km}^2$.
Opmerkingen: Jammer dat meteen naar de juiste formule (van de twee) werd verwezen.
In de modeluitwerking werd $K = 7{,}85$ genomen; dan krijgt men het gebied waar de amplitude van de beving *zeker* 1000 mm of meer is. De 'zekere' straal is gelijk aan 553,77 km; maar K kan ook nagenoeg gelijk zijn aan 7,95, hetwelk een straal van 597,95 km oplevert. De oppervlakten lopen ook nogal uiteen: de zekere is $963.000\,\mathrm{km}^2$ en de mogelijke is $1.123.000\,\mathrm{km}^2$.

17 De formule $K = \log A + 1{,}6 \cdot \log D - 0{,}15$ ombouwen
Uitwerking: De formule wordt

$$K = \log(A \cdot D^{1,6} \cdot 10^{-0,15}) = \log(0{,}7 \cdot A \cdot D^{1,6})$$

Opmerkingen: Standaard(?)

18 Gegeven: een cirkel, c met middelpunt $M = (-1, 3)$. Een lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, deze raakt c in A; een lijn k, loodrecht op l, deze raakt c in B. Het snijpunt van l en k is C. Gevraagd de som van de lengten van AC, BC en de boog AB.
Uitwerking: De lijn door M en A moet helling -2 hebben en heeft dus vergelijking $y-3 = -2(x+1)$; het snijpunt met l is $A = (1, -1)$. Dus de straal van de cirkel is de lengte van MA en dat is $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$. Maar dan is de gevraagde totale lengte gelijk aan

$$2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}\pi = 4\sqrt{5} + \pi\sqrt{5} \approx 15{,}97$$

Opmerkingen: Niet moeilijk.