Telprobleem

K. P. Hart

1. Theorie en opgaven voor zelfstudie

Inleiding

Iedereen weet wat tellen is. Hoeveel studenten zijn er in de collegezaal? Even tellen: één, twee, drie, ..., éénenvijftig, ...

Wat hier wiskundig gebeurt is het construeren van een bijectie tussen twee verzamelingen, namelijk de verzameling die we willen tellen en een standaard verzameling: eentje van de vorm $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Nu is 'gewoon' tellen een nogal saaie bezigheid en, zeker als de verzameling te tellen dingen groot is, de kans op fouten is niet nul. Als de verzameling een beetje gestructureerd is kan het tellen soms efficiënter door slim in groepjes te verdelen, die te tellen en de resultaten op te tellen. In een collegezaal bijvoorbeeld kun je vaak beter rij voor rij tellen en dan optellen.

In dit hoofdstuk zullen we aantal telmethoden behandelen; deze zullen ons in staat stellen allerlei praktische zaken aan te pakken. Zo zullen we formules maken voor de volgende aantallen:

1. het aantal afbeeldingen van $\{1, 2, \dots, k\}$ naar $\{1, 2, \dots, n\}$
2. het aantal injectieve afbeeldingen van $\{1, 2, \dots, k\}$ naar $\{1, 2, \dots, n\}$
3. het aantal surjectieve afbeeldingen van $\{1, 2, \dots, n\}$ naar $\{1, 2, \dots, k\}$
4. het aantal bijectieve afbeeldingen van $\{1, 2, \dots, k\}$ naar $\{1, 2, \dots, n\}$
5. het aantal deelverzamelingen van $\{1, 2, \dots, n\}$ met k elementen

Heel veel praktische problemen zijn tot de bovenstaande terug te voeren:

- Hoeveel mogelijkheden zijn er om een lottoformulier in te vullen?
- Hoeveel verschillende speelhanden kun je tegenkomen bij een kaartspel?
- Op hoeveel manieren kunnen we een mentorgroep in twee (of drie) groepjes verdelen voor het maken van het huiswerk?
- Hoeveel tafelschikkingen zijn er waarbij partners niet naast elkaar zitten? Aan een ronde tafel, aan een rechthoekige tafel.

Notatie

Voor we verder gaan: we hebben wat notatie nodig om onze formuleringen wat kort te houden.

De verzameling $\{1, 2, \dots, n\}$ noteren we met $\mathbf{n}$.

Als X een verzameling is dan is $\mathcal{P}(X)$ de familie van *alle* deelverzamelingen van X en met $[X]^k$ geven we de familie deelverzamelingen die elk k elementen hebben aan.

Het aantal elementen van een verzameling X noteren we met $|X|$.

Opgave 1. Schrijf alle elementen van respectievelijk $[\mathbf{5}]^0$, $[\mathbf{5}]^1$ en $[\mathbf{5}]^2$ op.

Afbeeldingen: machten

Een afbeelding van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$ is, per definitie, een deelverzameling f van het product $\mathbf{k} \times \mathbf{n}$ met de eigenschap dat voor elke $i \in \mathbf{k}$ er precies één $j \in \mathbf{n}$ is zó dat $\langle i, j \rangle \in f$, en die j noteren we $f(i)$.

Hoeveel afbeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$ zij er?

Het tellen van deze deelverzamelingen is niet moeilijk; je kunt bij elke $i \in \mathbf{k}$ de waarde $f(i)$ onafhankelijk van de andere waarden nemen. Op die manier kun je n^k afbeeldingen maken.

Opgave 2. Hoeveel verschillende kettingen met honderd kralen kun je rijgen als je voldoende kralen van vier kleuren hebt.

De telling werkt ook als voor elke i een andere hoeveelheid waarden voorhanden is.

Opgave 3. Kies een rijtje natuurlijke getallen n_1, n_2, …, n_k. Toon aan: het aantal afbeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbb{N}$ met de eigenschap dat $f(i) \in \mathbf{n}_i$ voor alle i is gelijk aan $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$.

Opgave 4. Hoeveel verschillende nummerborden nieuwe stijl (cijfer - drie letters - twee cijfers) zijn er mogelijk?

Opgave 5. Hoeveel deelverzamelingen heeft de verzameling $\mathbf{k}$? *Aanwijzing*: Elke deelverzameling bepaalt een functie van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{2}$.

Dit soort telproblemen komt veel in de kansrekening voor: series worpen met munten en dobbelstenen kunnen als functies naar respectievelijk $\mathbf{2}$ en $\mathbf{6}$ opgevat worden.

Opgave 6. Gooi twintig keer een zuivere munt; hoeveel uitkomsten zijn er mogelijk? Hoeveel bij twintig worpen met een zuivere dobbelsteen?

Injecties en bijecties, faculteiten

Een afbeelding f is *injectief* als uit $i \neq j$ altijd $f(i) \neq f(j)$ volgt.

Hoeveel injectieve afbeeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$ zijn er?

We bekijken een concreet voorbeeld: bij een kaartspel als klaverjassen of bridge krijgt elke speler dertien kaarten. Als we even aannemen dat de kaarten één voor één gedeeld worden dan ziet een speler een rijtje van dertien verschillende kaarten voorbij komen. Dit komt overeen met een injectieve afbeelding van $\mathbf{13}$ naar $\mathbf{52}$.

Voor de eerste kaart hebben we 52 mogelijkheden, voor de tweede nog 51, …, voor de dertiende nog 40. In totaal kunnen we $52 \times 51 \times \cdots \times 40$ rijtjes langs zien komen.

De algemene formule ziet er net zo uit: er zijn

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) \tag{$*$}$$

injectieve afbeeldingen van $\mathbf{k}$ naar $\mathbf{n}$.

Opgave 7. Ga dit zorgvuldig na; waarom eindigt het product bij $n - k + 1$?

In het geval $k = n$ krijgen we het aantal *bijectieve* afbeeldingen van $\mathbf{n}$ naar zichzelf (de permutaties van $\mathbf{n}$); dat aantal is dus

$$n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

dat product korten we af met $n!$ (spreek uit: n-faculteit). Merk op dat het product in formule $(*)$ geschreven kan worden als

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Ook deze formules hebben hun toepassing in de kansrekening.

OPGAVE 8. Wat is de kans dat een speler alleen rode kaarten krijgt? Wat is de kans dat zij alle kaarten van één van de vier kleuren krijgt?

OPGAVE 9. Wat is de kans op alle zes goed bij een lottotrekking?

OPGAVE 10. Op een (traditioneel) feest zijn tien jongens en tien meisjes; er wordt een groepsdans gehouden waarbij elke seconde elke jongen één meisje de hand reikt. De bedoeling is dat alle mogelijke koppelingen een keer gerealiseerd worden. Hoe lang duurt de dans?

Deelverzamelingen, binomiaalcoëfficiënten

Onze bridge-speler is niet geïnteresseerd in de volgorde waarin de kaarten binnenkomen; zij sorteert ze zelf wel op een handige manier. Het gaat haar om de *verzameling* kaarten in haar hand en we hebben net gezien dat die verzameling op 13! verschillende manieren gedeeld kan worden. Het aantal speelhanden dat mogelijk is is dus niet $\frac{52!}{39!}$ maar

$$\frac{52!}{13! \times 39!}$$

OPGAVE 11. Wat is het aantal manieren om een lottoformulier in te vullen?

De algemene formule voor het aantal deelverzamelingen van $\mathbf{n}$ met k elementen is het product $(*)$, gedeeld door $k!$:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (**)$$

dat laatste quotiënt komt in heel veel formules voor en heeft zijn eigen notatie gekregen:

$$\binom{n}{k}$$

Dit wordt meestal als 'n-kies-k' of 'n-boven-k' uitgesproken en een *binomiaalcoëfficiënt* genoemd.

Binomiaalcoëfficiënten

Omdat de binomiaalcoëfficiënten op veel plaatsen voorkomen gaan we ze wat beter bekijken. Er zijn heel veel formules waar ze een rol spelen en formules die relaties tussen de coëfficiënten onderling geven. We beginnen eenvoudig, voor een paar waarden van k is $\binom{n}{k}$ eenvoudig te bepalen.

OPGAVE 12. Toon aan: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ en $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Doe dit op twee manieren, algebraïsch en door naar de families deelverzamelingen te kijken die geteld worden.

1. Stelling. *Als* $0 \leqslant k \leqslant n$ *dan*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Opgave 13. Ga dit zelf op twee manieren na: door naar de formule te kijken en door een bijectie te maken tussen de families $[\mathbf{n}]^k$ en $[\mathbf{n}]^{n-k}$.

Als n oneven is levert deze opgave ook een oplossing voor de volgende.

Opgave 14. Toon aan dat $\mathbf{n}$ even veel deelverzamelingen met een even aantal elementen heeft als deelverzamelingen met een oneven aantal elementen. *Aanwijzing*: Definieer, voor $A \subseteq \mathbf{n}$ een verzameling A' als volgt: $A' = A \setminus \{1\}$ als $1 \in A$ en $A' = A \cup \{1\}$ als $1 \notin A$.

Een belangrijke gelijkheid is de volgende

2. Stelling. *Als* $n > k > 0$ *dan geldt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Opgave 15. Bewijs deze stelling op twee manieren

(a) Door de breuken

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \qquad \text{en} \qquad \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

bij elkaar op te tellen.

(b) Door de familie $[\mathbf{n+1}]^k$ twee groepen te verdelen: de verzamelingen waar $n+1$ in zit en die waar $n+1$ niet in zit.

Deze stelling stelt ons in staat de binomiaalcoëfficiënten in een tabel weer te geven die bekend staat als de *Driehoek van Pascal*, zie Figuur 1. Elk getal in de tabel is de som van de twee getallen die er links- en rechtsboven staan.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \iddots & & \iddots & & & & \ddots & & \\
 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \cdots & & & & \binom{n}{n} & \\
\binom{n+1}{0} & & \binom{n+1}{1} & & \binom{n+1}{2} & \cdots & & & \binom{n+1}{n} & & \binom{n+1}{n+1}
\end{array}$$

Figuur 1. De driehoek van Pascal

Opgave 16. Bewijs op twee manieren: $\binom{n+1}{3} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{2}$.

We kunnen Opgave 12 en Stelling 2 ook gebruiken om de juistheid van de formule $(**)$ op een alternatieve manier te bewijzen. Als we, tijdelijk, met $B(n,k)$ het quotiënt in $(**)$ aanduiden en met $C(n,k)$ het aantal elementen van $[\mathbf{n}]^k$ dan kun je de opgave en het bewijs van de stelling ook opvatten als bewijzen van

- $B(n,0) = B(n,n) = 1$ en $B(n+1,k) = B(n,k-1) + B(n,k)$, en
- $C(n,0) = C(n,n) = 1$ en $C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$.

OPGAVE 17. Bewijs, uitgaande van het bovenstaande, dat $B(n,k) = C(n,k)$ voor alle n en k.

De binomiaalcoëfficiënten komen ook voor in een formule voor machten van $a+b$.

3. STELLING. *Voor elke n geldt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Deze stelling kun je op diverse manieren aantonen. je kunt $(a+b)^n$ geheel uitvermenigvuldigen, zonder te vereenvoudigen, en dan op te merken dat je, voor elke k, precies evenveel producten met k factoren b krijgt als deelverzamelingen van $\mathbf{n}$ met k elementen. We kijken even naar $(a+b)^2$ en $(a+b)^3$:

$$(a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b) = aa + ab + ba + bb$$

en

$$(a+b)^3 = a(a+b)^2 + b(a+b)^2 = aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb$$

In deze speciale gevallen kun je eenvoudig nagaan dat elke deelverzameling van $\mathbf{2}$ en $\mathbf{3}$ precies één keer met b-en gevuld aanwezig is en dat we na vereenvoudiging de formule uit de stelling krijgen.

We baseren ons bewijs op Opgave 12 en Stelling 2; we schrijven

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} N(n,k) a^{n-k} b^k$$

en we bewijzen dat de getallen $N(n,k)$ dezelfde eigenschappen als $B(n,k)$ en $C(n,k)$ hebben. Begin met $(a+b)^{n+1}$ te schrijven als $(a+b)(a+b)^n$:

$$(a+b) \sum_{k=0}^{n} N(n,k) a^{n-k} b^k$$

werk de haakjes weg, er komt

$$\sum_{k=0}^{n} N(n,k) a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} N(n,k) a^{n-k} b^{k+1}.$$

We herschrijven de tweede som:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} N(n,k) a^{n-k} b^{k+1} &= N(n,0) a^n b + N(n,1) a^{n-1} b^2 + \cdots + N(n,n) a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} N(n,k-1) a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

Nu kunnen we de beide sommen bij elkaar optellen:

$$N(n,0)a^n + \sum_{k=1}^{n}\bigl(N(n,k)+N(n,k-1)\bigr)a^{n+1-k}b^k + N(n,n)b^n$$

Hieruit lezen we de volgende dingen af:

- $N(n+1,0) = N(n,0)$;
- $N(n+1,k) = N(n,k) + N(n,k-1)$; en
- $N(n+1,n+1) = N(n,n)$.

Merk op dat $N(1,0) = N(1,1) = 1$ en dus volgt successievelijk dat $N(n,0) = N(n,n) = 1$ voor alle n. Dankzij de middelste formule volgt nu dat $N(n,k) = \binom{n}{k}$ voor alle n en k.

Met behulp van deze stelling kunnen we, door a en b slim te kiezen, nieuwe formules afleiden.

Opgave 18. Toon aan: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. (NB dit wisten we al, zie Opgave 5.)

Opgave 19. Toon aan: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. (NB dit wisten we ook al, zie Opgave 14.)

Opgave 20. Toon aan: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Opgave 21. Toon aan: $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

Opgave 22. Bewijs: als $l < k \leqslant \frac{n}{2}$ dan $\binom{n}{l} < \binom{n}{k}$.

Opgave 23. Bewijs: $\binom{2n}{n} > \frac{4^n}{2n+1}$. *Aanwijzing*: Wat is het gemiddelde van $\binom{2n}{0}$, $\binom{2n}{1}$, $\ldots$, $\binom{2n}{n}$, $\ldots$, $\binom{2n}{2n}$?

Surjecties en verdelingen: het principe van inclusie-exclusie

We gaan nu het aantal *surjectieve* afbeeldingen van $\mathbf{n}$ naar $\mathbf{k}$ tellen. De algemene formule is wat lastiger te ontdekken dan die voor de injectieve en bijectieve afbeeldingen. Herinner dat een afbeelding $f : \mathbf{n} \to \mathbf{k}$ surjectief is als voor elke $j \in \mathbf{k}$ een $i \in \mathbf{n}$ bestaat met $f(i) = j$.

We noteren het gewenste aantal als $\left|{n \atop k}\right|$. In een paar gevallen kunnen we de waarde van $\left|{n \atop k}\right|$ snel opschrijven. Om te beginnen: als $k = 0$ of $k > n$ dan $\left|{n \atop k}\right| = 0$.

Opgave 24. Ga na: $\left|{n \atop 1}\right| = 1$ en $\left|{n \atop n}\right| = n!$

Opgave 25. Toon aan dat $\left|{n \atop 2}\right| = 2^n - 2$.

Opgave 26. Bepaal $\left|{n \atop 3}\right|$ en $\left|{n \atop 4}\right|$ voor een aantal waarden van n.

De methode waarmee we $\left|{n \atop k}\right|$ gaan bepalen is als volgt. We beginnen met *alle* afbeeldingen van $\mathbf{n}$ to $\mathbf{k}$, dat zijn er k^n. Vervolgens bepalen we het aantal niet-surjectieve afbeeldingen en trekken dat van k^n af.

Hiertoe verdelen we de niet-surjectieve afbeeldingen in groepen: voor elke $j \in \mathbf{k}$ schrijven we $E(j) = \{f : j \notin f[\mathbf{n}]\}$. Het enige dat we nu nog moeten doen is de vereniging $\bigcup_{j=1}^{k} E(j)$ tellen.

We doen, om te beginnen, het geval $k = 2$ uit Opgave 25 nog eens, wellicht niet op de manier waarop je die opgave hebt gedaan. In dit geval bestaan $E(1)$ en $E(2)$ elk uit één afbeelding, respectievelijk die met constante waarde 2 en 1; we vinden dat $E(1) \cup E(2)$ precies twee elementen heeft en dus, inderdaad, $\left|{n \atop 2}\right| = 2^n - 2$.

Nu het geval $k = 3$. We hebben drie verzamelingen $E(1)$, $E(2)$ en $E(3)$ en we willen weten hoeveel elementen hun vereniging heeft. Om dat aantal te bepalen beginnen we met de individuele aantallen op te tellen:

$$\left|E(1)\right| + \left|E(2)\right| + \left|E(3)\right|$$

Dit getal is te groot omdat we de elementen van de doorsneden $E(1)\cap E(2)$, $E(1)\cap E(3)$ en $E(2)\cap E(3)$ dubbel geteld hebben. Dan trekken we die aantallen er weer af:

$$\left|E(1)\right| + \left|E(2)\right| + \left|E(3)\right| - \left|E(1) \cap E(2)\right| - \left|E(1) \cap E(3)\right| - \left|E(2) \cap E(3)\right|$$

Echter, nu hebben we de elementen van $E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ drie keer meegeteld en ook weer drie keer weggelaten; om het juiste aantal te maken moeten we dat aantal er dus nog een keer bij optellen:

$$\left|E(1)\right|+\left|E(2)\right|+\left|E(3)\right|-\left|E(1)\cap E(2)\right|-\left|E(1)\cap E(3)\right|-\left|E(2)\cap E(3)\right|+\left|E(1)\cap E(2)\cap E(3)\right|$$

Teken een plaatje van drie verzamelingen om te zien hoe deze rekenpartij in zijn werk gaat.

Voor de verdere uitwerking is het mooi dat alle $E(i)$ even groot zijn, namelijk $\left|E(i)\right| = 2^n$; ook alle doorsneden $E(i) \cap E(j)$ zijn even groot: elk heeft $1^n = 1$ element en de totale doorsnede $E(1) \cap E(2) \cap E(3)$ is leeg. We zien dat

$$\left|E(1) \cup E(2) \cup E(3)\right| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1^n + 0^n$$

en dus

$$\left|{n \atop 3}\right| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n - 0^n$$

We hebben de factoren 1^n en 0^n even meegenomen omdat deze de structuur van de algemene formule al helpen laten zien. We kunnen namelijk ook schrijven

$$\left|{n \atop 3}\right| = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{i} (3-i)^n$$

Deze formule geldt ook algemeen

4. STELLING. *Als $0 < k \leqslant n$ dan geldt*

$$\left|{n \atop k}\right| = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Voor we het algemene bewijs geven kijken we nog even naar de afleiding van de formule voor $\left|{n \atop 3}\right|$. We laten zien dat elk element van $E(1) \cup E(2) \cup E(3)$ inderdaad precies één keer geteld wordt. Neem een niet-surjectieve $f : \mathbf{n} \to \mathbf{3}$ en kijk naar het complement van $f[\mathbf{n}]$. Als dat complement uit één punt bestaat, zeg 2, dan wordt f alleen bij $\bigl|E(2)\bigr|$ geteld, zijn bijdrage aan alle andere termen is nul. Als het complement uit twee punten bestaat, bijvoorbeeld 1 en 2, dan is zijn bijdrage gelijk aan $1+1-1=1$: de positieve 1-en komen van $\bigl|E(1)\bigr|$ en $\bigl|E(2)\bigr|$ en de -1 komt van $-\bigl|E(1)\cap E(2)\bigr|$.

Bewijs van Stelling 4. We tellen weer het aantal niet-surjectieve afbeeldingen, dat wil zeggen

$$\bigl|E(1)\cup E(2)\cup\cdots\cup E(k)\bigr|$$

We beginnen weer met $\bigl|E(1)\bigr|+\bigl|E(2)\bigr|+\cdots+\bigl|E(k)\bigr|$; de $E(j)$ hebben allemaal $(k-1)^n$ elementen; dus de som is gelijk aan $k(k-1)^n$. Wegens dubbel tellen moeten we daar $\bigl|E(j_1)\cap E(j_2)\bigr|$ van aftrekken voor elk tweetal $\{j_1, j_2\}$. Elke doorsnede heeft $(k-2)^n$ elementen en er zijn $\binom{k}{2}$ doorsneden dus we krijgen $\binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n$. Maar nu tellen we de afbeeldingen in de doorsneden $E(j_1)\cap E(j_2)\cap E(j_3)$ niet mee, dus we tellen hun aantallen bij ons totaal op; er zijn $\binom{k}{3}$ van die doorsneden en die hebben elk $(k-3)^n$ elementen. We zijn nu bij $\binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^n$.

Op stap i hebben we te maken met afbeeldingen die ten minste i waarden missen; die zitten in een doorsnede van de vorm $E(j_1)\cap\cdots\cap E(j_i)$. Daar zijn er $\binom{k}{i}$ van en elk heeft $(k-i)^n$ elementen. Als i oneven is trekken we af, als i even is tellen we op; de bijdrage is dus

$$(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n$$

Alles bij elkaar komen we uit op

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n$$

niet-surjectieve afbeeldingen en dus op

$$k^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(k-i)^n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\binom{k}{i}(k-i)^n$$

surjectieve afbeeldingen. □

Stirling-getallen. Merk op: een surjectieve afbeelding $f : \mathbf{n} \to \mathbf{k}$ bepaalt een verdeling van $\mathbf{n}$ in k niet-lege deelverzamelingen: voor $i \in \mathbf{k}$ nemen we $A_i = \{j : f(j) = i\}$. De *verdeling* verandert niet als we de getallen in $\mathbf{k}$ permuteren. Dus elke verdeling correspondeert met $k!$ surjectieve afbeeldingen. Conclusie het aantal manieren om $\mathbf{n}$ in $\mathbf{k}$ niet-lege deelverzamelingen te verdelen is

$$\frac{1}{k!}\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|$$

en dat aantal wordt met $\left\{ {n \atop k} \right\}$ aangeduid; de getallen $\left\{ {n \atop k} \right\}$ worden *Stirling-getallen van de tweede soort* genoemd.

Opgave 27. Op hoeveel manieren kan een mentorgroep van tien studenten in drie groepjes worden verdeeld.

OPGAVE 28. Op hoeveel manieren kan een mentorgroep van tien studenten op min-of-meer eerlijke manier in drie groepjes worden verdeeld. Met min-of-meer eerlijk bedoelen we een dier-drie-vier-verdeling.

Het principe van Inclusie-Exclusie

In het bovenstaande bewijs zit een formule verstopt die we nu expliciet gaan maken. Neem een n-tal verzamelingen A_1, A_2, $\ldots$, A_n. We gaan $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ bepalen en we volgen de methode uit het bovenstaande bewijs. Om dat wat netjes op te kunnen schrijven voeren we wat afkortingen in:

1. voor een deelverzameling I van $\mathbf{n}$ schrijven we $A(I) = \bigcap_{i \in A} A_i$;
2. voor $k \leqslant n$ schrijven we $T(k) = \sum\bigl\{|A(I)| : I \in [\mathbf{n}]^k\bigr\}$

Bijvoorbeeld: $T(1) = \sum_{i=1}^{n}|A_i|$ en $T(2) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}|A_i \cap A_j|$.

5. STELLING. *De volgende formule geldt*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}T(k) \tag{†}$$

Deze stelling heet wel het *Principe van Inclusie-Exclusie* of ook de *Zeefformule*. Het is vaak gebruikelijk af te spreken dat $A(\varnothing) = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ en dan kunnen we formule (†) ook als volgt opschrijven:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k T(k) = 0 \tag{‡}$$

Het bewijs gaat als in het geval van $E(1) \cup E(2) \cup E(3)$. Elk punt van de vereniging draagt 1 bij aan het aantal elementen van die vereniging. We kijken wat de bijdrage van een punt x aan de rechterkant van (†) is. Hiertoe nemen we aan dat x tot l van de verzamelingen A_i behoort, zeg A_{i_1}, $\ldots$, A_{i_l}. We bekijken hoeveel x bijdraagt aan elke $T(k)$.

De bijdrage aan $T(1)$ is l: voor elke i_j draagt hij 1 bij.

De bijdrage aan $T(2)$ is $\binom{l}{2}$: er is een bijdrage van 1 aan $|A(i) \cap A(j)|$ precies dan als $x \in A_i$ en $x \in A_j$.

Evenzo is de bijdrage aan $T(3)$ gelijk aan $\binom{l}{3}$ en in het algemeen is de bijdrage aan $T(k)$ gelijk aan $\binom{k}{l}$; voor $k > l$ is die bijdrage dus gelijk aan 0.

De bijdrage van x aan de som $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}T(k)$ is dus gelijk aan $\sum_{k=1}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}$. Pas nu Opgave 19 toe: $\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\binom{l}{k} = 0$; breng alle termen op de eerste na naar rechts, er komt

$$1 = \sum_{k=1}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k}$$

Dus het element x wordt aan de rechterkant van (†) ook precies één keer geteld.

Deze formule kun je gebruiken om gegevens te controleren.

Opgave 29. Er zijn 35 wiskundestudenten die hun voorkeur hebben uitgesproken voor bepaalde keuzevakken: 18 studenten willen Logica (L) doen, 23 willen Numerieke Wiskunde (N) volgen, 21 kiezen voor Verzamelingenleer (V) en 17 voor Reële Analyse (R). Verder willen er 9 L en N doen, 7 L en V, 6 kiezen voor L en R, 12 doen N en V, 9 doen N en R, en 12 gaan voor V en R. Er zijn ook studenten die drie vakken kiezen: 4 doen LNV, 3 doen LNR, 5 doen LVR en 7 doen NVR; er zijn 3 studenten die alles willen volgen. Is de administratie op orde?

Opgave 30. Hoeveel getallen uit **10000** zijn deelbaar door 3, door 5, maar niet deelbaar door 7 en ook niet deelbaar door 11?

Ballen in dozen

Telproblemen zijn er in vele soorten maar vaak kun je iets tot een standaardprobleem terugbrengen. Een veelgebruikte standaardvorm is 'ballen in dozen stoppen'.

De uitgangssituatie is: we hebben n dozen, genummerd 1 tot en met n, en we hebben k ballen. Op hoeveel manieren kunnen we die ballen over de dozen verdelen? Die vraag is eigenlijk een groot aantal vragen in één.

We kunnen namelijk al meteen twee gevallen onderscheiden:

1. de ballen zijn allemaal verschillend (bijvoorbeeld genummerd 1 tot en met k)
2. de ballen zijn allemaal gelijk

Verder kunnen we eisen aan de verdeling opleggen:

1. in elke doos ten hoogste één bal
2. het maakt niet uit hoeveel ballen elke doos krijgt
3. in elke doos ten minste één bal

We lopen de zes vragen die we zo krijgen langs.

Verschillende ballen, ten hoogste één per doos

Elke verdeling codeert een injectieve afbeelding van **k** naar **n**; dit kan dus op $\frac{n!}{k!}$ manieren.

Praktische situatie: een loterij met verschillende prijzen en waarbij iedereen één lot koopt/krijgt.

Verschillende ballen, aantal per doos maakt niet uit

Nu codeert een verdeling een afbeelding f van **k** naar **n**, gedefinieerd door: $f(i) = j$ als bal i in doos j komt.

Het aantal verdelingen is dus gelijk aan n^k.

Praktische situaties: telefoonnummers tellen; een verloting met verschillende prijzen waar iedereen willekeurig veel lootjes kan kopen.

Verschillende ballen, ten minste één per doos

Ook nu coderen we afbeeldingen **k** naar **n** maar dan wel *surjectieve* afbeeldingen.

Het aantal verdelingen is dus gelijk aan $\left|{k \atop n}\right|$.

Praktische situaties: een verloting evenveel loten als (verschillende) prijzen en waarbij iedereen een lot heeft gekocht.

Gelijke ballen, ten hoogste één per doos

Nu komt een verdeling overeen met het kiezen van een element van $[\mathbf{n}]^k$; dit kan dus op $\binom{n}{k}$ manieren.

Praktische situatie: aankondigingen van een feestje uitdelen. De aankondigingen zijn identiek en je wilt geen blaadje verspillen.

Gelijke ballen, aantal per doos maakt niet uit

Deze situatie hebben we, lijkt het, nog niet gehad.

Een praktisch voorbeeld: koekjes uitdelen, waarbij het er heel oneerlijk toe kan gaan want de mogelijkheid bestaat dat één persoon alle koekjes krijgt.

Hoeveel niet-negatieve geheeltallige oplossingen heeft de vergelijking $x+y+z=10$? Bijvoorbeeld, $x=0$ $y=0$ en $z=10$, of: $x=10$, $y=0$ en $z=0$ (deze telt als een andere oplossing). De dozen zijn hier x, y en z, en de identieke ballen zijn tien 1-en.

We kunnen dit tot een deelverzamelingenprobleem terugbrengen. Dat gaat als volgt: leg alle dozen aan elkaar in een rij, lijm ze eventueel aan elkaar. Als we de ballen binnen elke doos op een rijtje leggen ontstaat een rij dingen die uit ballen en aan elkaar gelijmde zijkanten bestaat. In Figuur 2 is een situatie met negen ballen en vijf dozen te zien: de

$$\bullet \mid \bullet\bullet \mid \; \mid \bullet\bullet\bullet \mid \bullet\bullet\bullet$$

FIGUUR 2. Negen ballen in vijf dozen

vier lijntjes geven de vastgelijmde zijkanten weer *tussen* de dozen. De stippen geven de ballen weer: één in doos 1, twee in doos 2, nul in doos 3, de drie in zowel doos 4 als doos 5. Er staat dus een rij van dertien symbolen en zodra we de vier lijntjes op vier van de dertien plekken hebben geplaatst ligt de verdeling van de ballen ook vast. Dat betekent dat we $\binom{13}{4} = \binom{13}{9}$ mogelijke verdelingen van de negen ballen over de vijf dozen hebben.

De algemen formule is nu niet moeilijk meer: we moeten k ballen en $n-1$ tussenschotten op een rij zetten. Dus: $n-1$ posities uit $k+n-1$ kiezen en daar de lijntjes zetten, in totaal

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

mogelijk verdelingen.

OPGAVE 31. Hoeveel oplossingen heeft de bovenstaande vergelijking $x+y+z=10$?

Gelijke ballen, ten minste één bal per doos

Deze situatie lijkt ook nieuw maar is eigenlijk bijna dezelfde als de vorige. Het is hier natuurlijk nodig dat $k \geqslant n$. Als we eerst n ballen pakken en er één in elke doos leggen kunnen we daarna de rest, $k-n$ ballen, weer willekeurig over de dozen verdelen. Het antwoord is dus

$$\binom{k-n+n=1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1}$$

OPGAVE 32. Hoe kun je direct zien dat het antwoord $\binom{k-1}{n-1}$ moet zijn?

OPGAVE 33. Hoeveel *positieve* geheeltallige oplossingen heeft de vergelijking $x + y + z = 10$?

Meer Opgaven

OPGAVE 34. Los het probleem van de k identieke ballen die willekeurig over de n dozen verdeeld worden op. *Aanwijzing*: Zet de dozen tegen elkaar aan, op een rij, en geef de 'wanden tussen de dozen aan met streepjes. Leg binnen elke doos de aanwezige ballen ook op een rij. Uit hoeveel symbolen bestaat de resulterende rij? Wanneer ligt zo'n rij vast?

OPGAVE 35. Los het probleem van de k identieke ballen die over de n dozen verdeeld worden met in elke doos ten minste één bal op. *Aanwijzing*: Breng het probleem terug tot het voorgaande.

OPGAVE 36. Nog meer ballen en dozen. We hebben nog steeds n dozen en k ballen. Schrijf $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$, met elke k_i geheel en niet negatief.

(a) Op hoeveel manieren kunnen we k identieke ballen over de dozen verdelen, zó dat er k_i ballen in doos i komen?

(b) Op hoeveel manieren kunnen we k verschillende ballen over de dozen verdelen, zó dat er k_i ballen in doos i komen?

OPGAVE 37. Neem $n \in \mathbb{N}$, zet $X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ en definieer een afbeelding $f : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{N}$ door $f(A) = \sum_{i \in A} 2^{-i}$.

(a) Toon aan dat f injectief is.

(b) Wat is het beeld van f? *Aanwijzing*: bekijk eerst wat eenvoudige gevallen: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, …

OPGAVE 38. Een bekend probleem vraagt naar het aantal permutaties van **n** zonder dekpunten (denk aan lootjes trekken voor een Sinterklaasviering); we noemen dat aantal D_n. We noteren de verzameling permutaties van **n** met S_n en voor elke i schrijven we $A_i = \{f \in S_n : f(i) = i\}$ (dus $\bigcup_{i=1}^n A_i$ bestaat uit de permutaties *met* een dekpunt). We definiëren $A(I)$ en $T(k)$ als boven.

(a) Bepaal $|A(I)|$ / Toon aan $|A(I)| = (n - |I|)!$.

(b) Bepaal $T(k)$ / Toon aan $T(k) = \binom{n}{k}(n-k)!$

(c) Toon aan $D_n = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$.

(d) Is de kans dat bij een groep van tien personen het lootjes trekken in één keer lukt groter of kleiner dan $\frac{1}{2}$?

OPGAVE 39. Een password van een TU Delft netId moet tenminste acht karakters lang zijn en ten minste één cijfer, één kleine letter, één hoofdletter en één symbool (niet-cijfer, niet-letter) bevatten. Bepaal, uitgaande van een standaard QWERTY-toetsenbord (Figuur 3) het aantal geldige passwords van respectievelijk zeven, acht, negen en tien karakters. (Onderzoek of de spatie ook een geldig symbool is!)

OPGAVE 40. (a) Voor elke n: hoeveel getallen van n cijfers zijn er waarvan de cijfers in niet-stijgende volgorde staan?

(b) Voor $n \leqslant 10$: hoeveel getallen van n cijfers hebben hun cijfers in strikt dalende volgorde?

Figuur 3. QWERTY